

Manual de Cálculo 1A

Laura Aspirot
Fernando Peláez
Pedro Sakorko
Andrés Sosa
Gonzalo Hornos
Cristina Roshani

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
COMISIÓN SECTORIAL DE ENSEÑANZA
Y EDUCACIÓN PERMANENTE

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Prorrectorado
de **Enseñanza**

En este libro se incluyeron diversos aportes realizados en el correr de los años por las compañeras y compañeros de la unidad académica Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas y Administración, así como parte de los contenidos de las notas de Cálculo 1A y Cálculo 1B de años anteriores (Fernando Peláez y Gabriel Coates, respectivamente).

Manual de Cálculo 1A

Laura Aspirot, Fernando Peláez,
Pedro Sakorko y Andrés Sosa

Gonzalo Hornos y Cristina Roshani
(responsables de las actividades con GeoGebra)

Financiación: Comisión Sectorial de Enseñanza y Educación Permanente,
Universidad de la República

Manual de Cálculo 1A /
Laura Aspirot, Fernando Peláez, Pedro Sakorko, Andrés Sosa, Gonzalo Hornos y Cristina Roshani.
Montevideo: Universidad de la República. Comisión Sectorial de Enseñanza y Educación Permanente, 2026.

225 p. -- (Manuales didácticos / Comisión Sectorial de Enseñanza y Educación Permanente).

ISBN: 978-9974-0-2414-4

1. CÁLCULO (MATEMÁTICAS)
2. FUNCIONES (MATEMÁTICAS)
3. TEOREMAS
4. ENSEÑANZA SUPERIOR
5. UNIVERSIDADES

I. Aspirot, Laura II. Peláez, Fernando III. Sakorko, Pedro
IV. Sosa, Andrés V. Hornos, Gonzalo VI. Roshani, Cristina

CDD: 515.25

La publicación de este libro fue realizada con el apoyo de la Comisión Sectorial de Enseñanza y Educación Permanente (CSEEP) de la Universidad de la República (Udelar).

Este manual es el producto de la presentación de un proyecto en el llamado de la CSEEP de la Udelar «Elaboración de manuales didácticos para la enseñanza de grado», 2020, que fuera aprobado en el mismo año y financiado durante 2021.





Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0, Laura Aspirot, Fernando Peláez, Pedro Sakorko y Andrés Sosa. [2026].
Facultad de Ciencias Económicas y Administración
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es

Comunicación y Publicaciones, CSEEP, Udelar.
Alberto Lasplaces 1620, 11600 Montevideo
Tel.: (+598) 2400 8393
www.cse.udelar.edu.uy comunicacion@cse.udelar.edu.uy

ISBN: 978-9974-0-2414-4
Coordinación editorial: Matías Núñez
Corrección de estilo y diseño editorial: Felipe Correa Buroni y Gabriela Basaldúa

Índice general

1. Funciones lineales **10**

1.1. Gráfica, pendiente y signo de funciones lineales 11
1.2. Determinación de una función lineal 22
1.3. Intersección de dos rectas en el plano 25
1.4. Funciones lineales de costo, ingreso y utilidad 27
1.5. Más ejercicios sobre este capítulo 33

2. Funciones cuadráticas **35**

2.1. Funciones cuadráticas y sus gráficas 36
2.2. Raíces y signo de una función cuadrática 38
2.3. Demanda e ingreso en función del precio 45
2.4. Costos y utilidad en función del precio 46
2.5. Ley de oferta y demanda 48
2.6. Más ejercicios sobre este capítulo 51

3. Más sobre funciones **54**

3.1. Concepto de función 55
3.2. Operaciones con funciones 59
3.3. Función potencial 63
3.4. Funciones definidas por más de una fórmula 70
3.5. Función valor absoluto 78
3.6. Impuesto a la renta de las personas físicas (IRPF) 81
3.7. Más ejercicios sobre este capítulo 83

4. Funciones exponencial y logarítmica **85**

4.1. Interés compuesto 86
4.2. Función exponencial 87
4.3. Función logarítmica 90
4.4. Aplicaciones en diferentes áreas 97
4.5. Más ejercicios sobre este capítulo 107

5. Límites para $x \longrightarrow a$ **108**

5.1. Límites finitos para $x \longrightarrow a$ 109
5.2. Límites infinitos para $x \longrightarrow a$ 112
5.3. Cálculo de límites 114
5.4. Cociente de polinomios para $x \to a$ 118

5.5. Límites laterales 121
5.6. Límites de las funciones potencial, exponencial y logarítmica 125
5.7. Más ejercicios sobre este capítulo 126

6. Límites para $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$ 128
6.1. Límites finitos para $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$ 129
6.2. Límites infinitos para $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$ 132
6.3. Límites de las funciones potencial, exponencial y logarítmica 134
6.4. Funciones equivalentes 134
6.5. Órdenes de infinitos 139
6.6. Más ejercicios sobre este capítulo 144

7. Continuidad 145
7.1. Continuidad de una función en un punto 146
7.2. Propiedades de las funciones continuas en $[a, b]$ 151
7.3. Más ejercicios sobre este capítulo 159
7.4. Anexo sobre la completitud del conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ 160

8. Derivabilidad 163
8.1. Derivada de una función en un punto 164
8.2. Función derivada y cálculo de derivadas 172
8.3. Regla de la cadena y más cálculos de derivadas 178
8.4. Aproximación por una función lineal 181
8.5. Más ejercicios sobre este capítulo 184

9. Variación de funciones y problemas de optimización 185
9.1. Propiedades de las funciones derivables en intervalos 186
9.2. Funciones crecientes y decrecientes 189
9.3. Elasticidad de la demanda 196
9.4. Optimización de funciones de una variable 200
9.5. Más ejercicios sobre este capítulo 208

Referencias bibliográficas 211

Índice alfabético 212

A. Respuestas de los ejercicios 214

Sugerencias para los estudiantes

Esta introducción tiene como objetivo presentar algunas observaciones y sugerencias que contribuyan a una utilización adecuada de este libro.

Unidad curricular Cálculo 1A

El contenido de este libro incluye todos los aspectos asociados con las unidades temáticas que se desarrollan en el curso de Cálculo 1A de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración. Si bien es autocontenido y puede utilizarse de forma autónoma, les sugerimos que asistan a las clases teórico-prácticas y que participen del entorno virtual de aprendizaje (EVA) del curso, en el que encontrarán diversas orientaciones, foros de discusión y una serie de actividades que consideramos apropiadas para favorecer los procesos de aprendizaje.

Estructura del libro

Las unidades temáticas se organizan por capítulos. Al comienzo de cada uno de ellos se presenta un problema o una descripción que tiene como objetivo motivar el objeto de estudio de ese capítulo. También encontrarán enlaces a una serie de videos cortos, disponibles en el canal de YouTube del curso, en los que se desarrollan conceptos, técnicas de cálculo, ejemplos y ejercicios.

Cada capítulo contiene, a su vez, secciones numeradas con dos dígitos. Así, por ejemplo, la sección 1.3 corresponde a la tercera sección del primer capítulo. Las páginas de inicio de los capítulos y de sus secciones se indican en el índice general del libro. En cada sección aparecen cuatro tipos de enunciados: definiciones, observaciones, teoremas y ejemplos. Para identificar cada uno de ellos se utilizan tres dígitos, que indican, de izquierda a derecha, el número de capítulo, el número de sección y el número del enunciado. Por ejemplo, la definición 3.2.1 corresponde a la primera definición de la segunda sección del capítulo 3. Del mismo modo, el teorema 7.2.3 corresponde al tercer teorema de la segunda sección del capítulo 7.

Otros enunciados son los ejercicios y las actividades con GeoGebra. Los primeros están resaltados en cuadros azules y las actividades, en cuadros rojos. Para facilitar su identificación, se numeran por capítulo, sin hacer referencia a las secciones. De este modo, el ejercicio 6.12 es el ejercicio número 12 del capítulo 6, mientras que la actividad con GeoGebra 5.4 es la cuarta actividad del capítulo 5. En las últimas páginas del libro aparecen las respuestas de la mayor parte de los ejercicios planteados. Por su parte, GeoGebra es un programa de libre acceso, y en clase se explicará cómo utilizarlo.

Cómo buscar y encontrar dentro de estas páginas

Además del índice general, hemos elaborado un índice alfabético, que aparece al final del libro. Si necesitan alguna referencia sobre un tema, pueden buscarla allí. Por ejemplo, si quieren encontrar una tabla de derivadas, pueden intentar buscar «Tabla, de derivadas». Si quieren localizar el teorema de Lagrange, pueden buscar «Teorema, de Lagrange».

Su utilización como texto del curso

Es conveniente que, antes de cada clase, lean las páginas sugeridas por el equipo docente. Inmediatamente después de cada definición, teorema u observación, encontrarán uno o varios ejemplos.

Entre los ejercicios propuestos en cada sección aparecen algunos de múltiple opción que usualmente provienen de revisiones y exámenes ya propuestos. Se agregan algunos más que pueden servir de autoevaluación.

Antes de pasar a los ejercicios, asegúrense de haberlos comprendido. Si encuentran dificultades con los ejercicios que aparecen al comienzo de cada tema, les recomendamos que vuelvan a leer los ejemplos, esta vez con más cuidado. Como siempre, pueden contar con el aporte del equipo docente y también de sus pares, en particular en los foros de discusión del EVA.

Su utilización como libro de consulta

Este material también puede servirles como base de consulta para otros cursos. Nuevamente, recuerden consultar los índices general y alfabético cuando busquen información sobre temas de matemática. Por ejemplo, al cursar unidades curriculares del área de economía, tal vez necesiten una referencia adicional sobre el concepto de elasticidad de la demanda. En el índice alfabético, lo encontrarán como «Función, de elasticidad».

Algunos comentarios sobre notación

- Los conjuntos de números reales, racionales, enteros y naturales serán respectivamente indicados con los símbolos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.
- La presencia de un asterisco en los símbolos anteriores indica la exclusión del cero. Por ejemplo: $\mathbb{R}^*$ quiere decir $\mathbb{R} - \{0\}$.
- $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los números reales positivos.
- Cuando no haya lugar a confusión, el producto $a.b$ de dos números a y b se indicará sin el punto de multiplicación. Es decir, $a\,b$ también representará la multiplicación de a por b.
- El cociente de dos números reales A y B ($B \neq 0$) será indicado mediante A/B o también $\dfrac{A}{B}$.
- Un **intervalo** es cualquiera de los conjuntos que se indican a continuación:
  - $(a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b \,\}$ (intervalo abierto acotado)
  - $[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b \,\}$ (intervalo cerrado acotado)
  - $[a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b \,\}$ (intervalo acotado ni abierto ni cerrado)
  - $(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b \,\}$ (intervalo acotado ni abierto ni cerrado)
  - $(a,+\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \,\}$ (semirrecta derecha abierta)
  - $(-\infty,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, x < b \,\}$ (semirrecta izquierda abierta)
  - $[a,+\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \,\}$ (semirrecta derecha cerrada)
  - $(-\infty,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b \,\}$ (semirrecta izquierda cerrada)
  - $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ (todo $\mathbb{R}$)

    Cuando hablemos de «intervalo cerrado», nos referiremos a un conjunto de la forma $[a,b]$, aunque no aclaremos explícitamente que, además, es acotado.
- Un **punto** en el plano lo denotamos como $A = (a,b)$.
- La finalización de las demostraciones de los teoremas se representa mediante $\square$.
- La finalización de los ejemplos se representa mediante ∇ .

Capítulo 1

Funciones lineales

Comencemos el libro considerando la situación de una empresa que produce y vende un solo tipo de artículo. Su precio se ha fijado en $ 20. Desde la administración de la empresa puede surgir la siguiente pregunta: ¿cuál es el ingreso obtenido si se venden 1000 artículos? Para responder esta pregunta debemos multiplicar la cantidad de unidades vendidas por el precio de cada una de ellas; así, se obtiene un ingreso de $ 20 000.

Si mantenemos el precio fijo en $ 20, podemos pensar que la cantidad de unidades vendidas es desconocida. Para modelar esta situación conviene introducir una variable x que represente la cantidad de artículos vendidos. En este caso, el ingreso dependerá de x. Podemos hablar, entonces, de la *función de ingreso*, dada por $I(x) = 20x$.

Este modelo microeconómico, extremadamente simplificado, en el que el ingreso es directamente proporcional al número de artículos vendidos, genera una función conocida y una de las más sencillas que se pueden considerar. Si bien en el problema concreto solo tiene sentido que la variable x tome valores naturales, ya que mide una cantidad de artículos, podemos estudiar la función para x en todos los números reales y luego interpretar correctamente los resultados. En este capítulo nos enfocaremos en repasar las propiedades básicas de las funciones lineales.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=7z2VBcJRLTM` (Funciones lineales parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=R1CalWacevg` (Funciones lineales parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=mcWoXIXg5gY&t=4s` (Funciones lineales parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=5hBqUJE5P7U&t=6s` (Funciones lineales parte 4)
`https://www.youtube.com/watch?v=RrLjUE_Vr8Y&t=32s` (Funciones lineales parte 5)

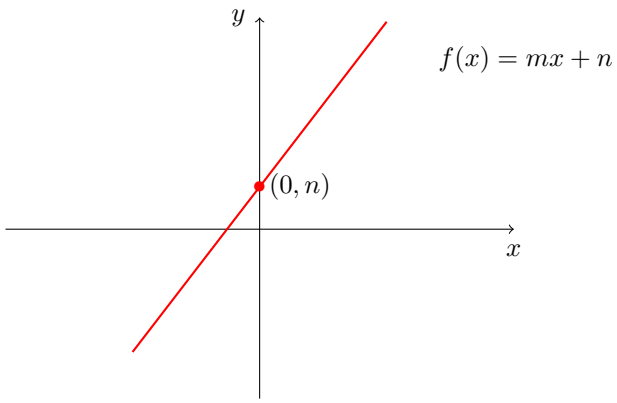
1.1 Gráfica, pendiente y signo de funciones lineales

Gráfica de una función lineal

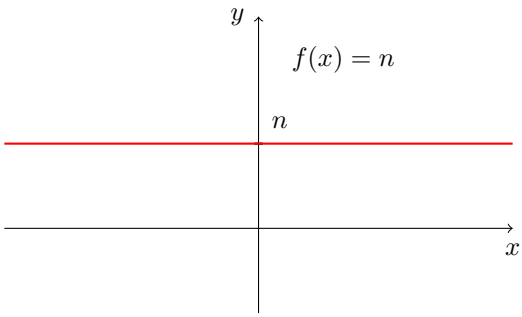
Definición 1.1.1. Funciones lineales
Una función f se dice **lineal** *cuando su dominio es $\mathbb{R}$ y existen constantes $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = mx + n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

Observación 1.1.1. Primeras observaciones de las funciones lineales

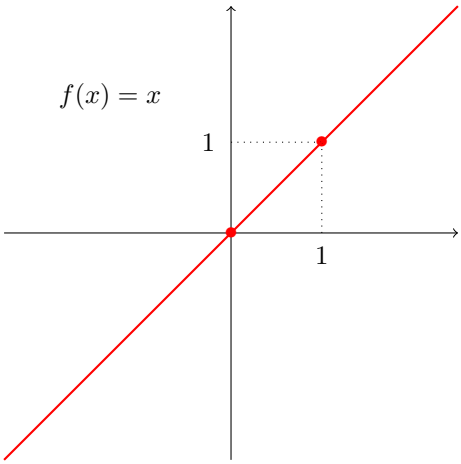
1. Si recordamos la definición general de polinomios, una función lineal corresponde al caso de una función constante o de una función polinómica de primer grado.
2. La gráfica de una función lineal es una recta. Si bien seguramente conozcas este resultado de cursos anteriores, vamos a justificarlo en el transcurso del capítulo. Como una recta queda determinada por dos puntos diferentes, se deduce que para graficar una función lineal alcanzará con encontrar dos puntos diferentes de su gráfica.
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = mx + n$. Si evaluamos la función en $x = 0$ obtenemos $f(0) = n$, lo que es equivalente a decir que el punto de coordenadas $(0, n)$ pertenece a la gráfica de f. El número n tiene entonces una interpretación simple: es la ordenada del punto donde la gráfica de f corta al eje $\overrightarrow{Oy}$, es decir, donde corta al eje vertical (de ordenadas).



4. En el caso en que $m = 0$, la función lineal queda $f(x) = n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Todos los puntos del dominio tienen el mismo correspondiente y, por lo tanto, la función es constante. Su gráfica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$, es decir, al eje horizontal (de abscisas).



Ejemplo 1.1.1. Queremos graficar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Para eso alcanza con encontrar dos puntos cualesquiera de su gráfica. Un valor simple para considerar es $x = 0$. Como $f(0) = 0$ entonces el punto $(0, 0)$ pertenece a la gráfica de f. Por otra parte, como $f(1) = 1$, entonces el punto $(1, 1)$ pertenece a la gráfica de f.

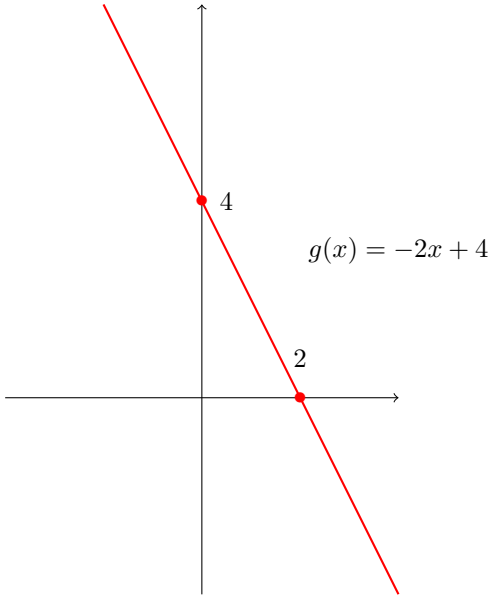


∇

Ejemplo 1.1.2. Queremos graficar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -2x+4$. Como $f(0) = 4$ entonces el punto $(0, 4)$ pertenece a la gráfica de f. Si bien alcanza con buscar otro punto cualquiera, es interesante hallar la raíz de esta función, es decir, el valor de x para el cual $f(x) = 0$.

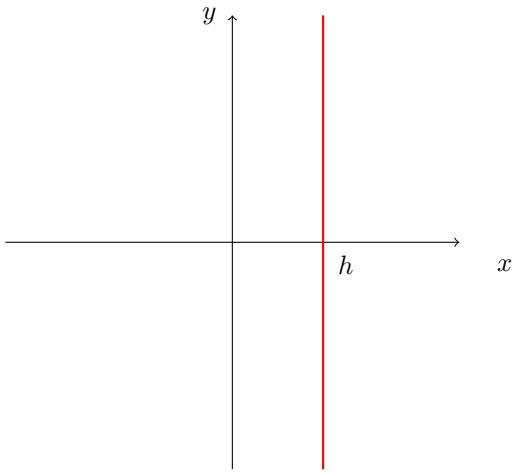
$$f(x) = 0 \iff -2x + 4 = 0 \iff -2x = -4 \iff x = 2.$$

Concluimos que $(2, 0)$ es el punto en el que esta recta corta al eje $\overrightarrow{Ox}$.



∇

Observación 1.1.2. Rectas paralelas al eje $\overrightarrow{Oy}$.
La ecuación de una recta paralela al eje $\overrightarrow{Oy}$ es de la forma $x = h$. Lo que nos dice esta ecuación es que todos sus puntos tienen abscisa fija h, mientras que la ordenada puede tomar cualquier valor. En el capítulo 3 veremos que estas rectas no son la gráfica de ninguna función.



Ejercicio 1.1.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 2x - 5$. Completa el siguiente cuadro realizando los cálculos correspondientes. ¿Qué conclusiones puedes sacar?

x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
1	2					
3	5					
6	2					
4	-2					

Ejercicio 1.2.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -3x + 4$. Completa el siguiente cuadro observando que se puede hacer de muchas maneras.

x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
		2				
		1				
		-1				
		-2				

Pendiente de una función lineal

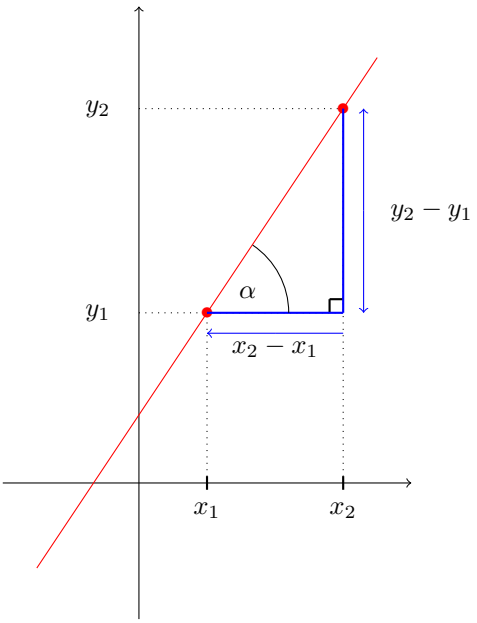
Consideremos la función lineal $f : f(x) = mx + n$ y sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos distintos de su gráfica (lo cual implica $x_1 \neq x_2$). Esto quiere decir que $y_1 = f(x_1) = mx_1 + n$ y que $y_2 = f(x_2) = mx_2 + n$. Observemos que, cualesquiera que sean los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, se cumple

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + n) - (mx_1 + n)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{m\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}} = m.$$

Resulta entonces que el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de dos puntos cualesquiera de la gráfica de f es constante y coincide con el número m. Este resultado es el que nos permite afirmar que la gráfica de f es una recta.

El número m se denomina **pendiente** o **coeficiente angular** de la función lineal (o de la recta), y nos da información sobre su «inclinación». En términos más precisos, m es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje $\overrightarrow{Ox}$ y se calcula mediante la ecuación

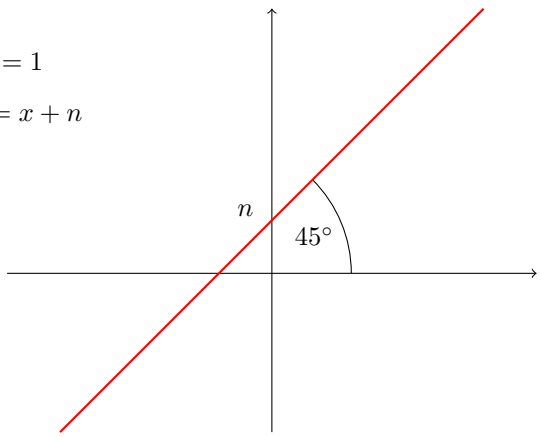
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Un caso especialmente sencillo e importante es cuando la pendiente vale 1, es decir, cuando la función lineal es de la forma $f(x) = x + n$. En este caso la relación $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ toma siempre el valor 1, esto permite concluir que la recta forma un ángulo de $45°$ con el eje $\overrightarrow{Ox}$.

$m = 1$

$f(x) = x + n$



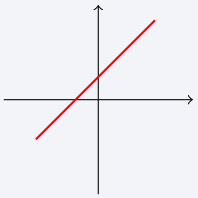
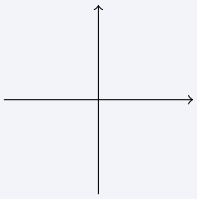
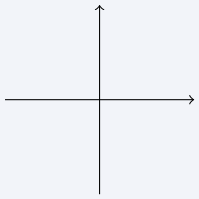
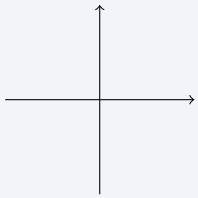
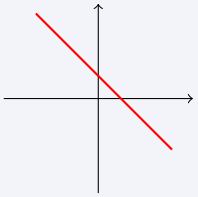
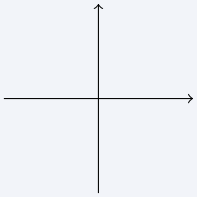
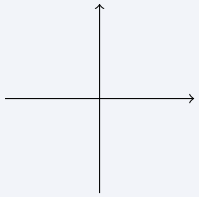
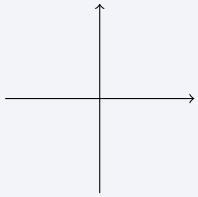
Actividad con GeoGebra 1.1.

En este enlace encontrarás un deslizador m que te permitirá trabajar con funciones f definidas mediante $f(x) = mx$. Al seleccionar dicho deslizador podrás trabajar con valores de m tanto positivos como negativos y observar el comportamiento de estas funciones f. También encontrarás un punto A que pertenece al gráfico de f y que puedes mover si lo seleccionas. A partir de lo observado, ¿se puede conjeturar que son verdaderas las siguientes afirmaciones?

1. Cuando $m > 0$, la función lineal es estrictamente creciente (los valores de $f(x)$ crecen a medida que x crece). A su vez, cuanto mayor sea la pendiente m, mayor será el ángulo que forma la recta con el eje $\overrightarrow{Ox}$ y la función crecerá «más rápido».
2. Si $m < 0$, la función es estrictamente decreciente. A su vez, cuanto menor es m, la función decrece «más rápido».

Ejercicio 1.3.

Completa el siguiente cuadro con un ejemplo de cada tipo de función lineal $f(x) = mx + n$, para distintos casos de m y n.

$m > 0, n > 0$	$m > 0, n < 0$	$m > 0, n = 0$	$m = 0, n > 0$
			
$m < 0, n > 0$	$m < 0, n < 0$	$m < 0, n = 0$	$m = 0, n < 0$
			

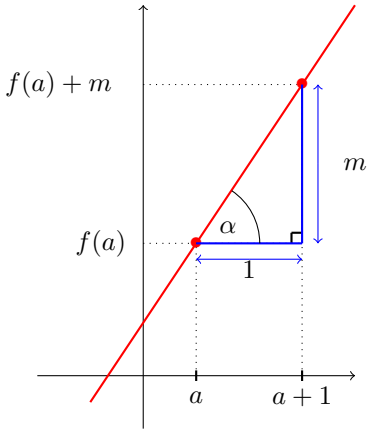
Observación 1.1.3. Gráfica conociendo un punto y la pendiente

Sea la función $f(x) = mx + n$ y consideramos un punto cualquiera $(a, f(a))$ de su gráfica. Si pasamos de la abscisa $x_1 = a$ a la abscisa $x_2 = a + 1$, entonces se cumple que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = \frac{f(a+1) - f(a)}{1} = f(a+1) - f(a),$$

de donde resulta que

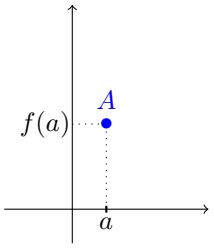
$$f(a+1) = f(a) + m.$$

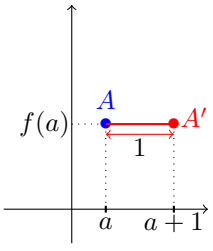


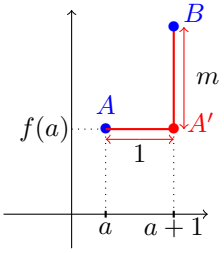
Con base en esta observación, es posible representar gráficamente una función lineal a partir de un punto $A = (a, f(a))$ de su gráfica y el valor de su pendiente m.

Si $m > 0$ (caso analizado en la imagen previa), realizamos los siguientes pasos.

1. Ubicamos el punto A de la gráfica.
2. A partir de A nos movemos una unidad a la derecha según la recta paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$ llegando al punto $A' = (a + 1, f(a))$.
3. A partir del punto A' nos movemos m hacia arriba (caso $m > 0$) según una paralela al eje $\overrightarrow{Oy}$, llegando al punto B.

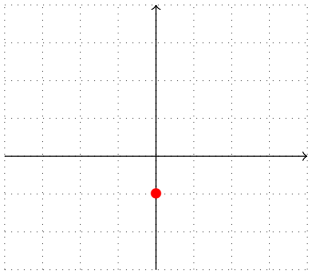




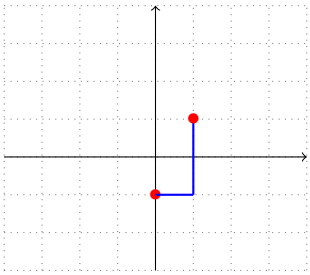


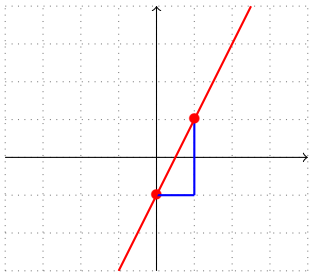
La recta buscada es la determinada por los puntos A y B.

Ejemplo 1.1.3. Queremos graficar la función $f(x) = 2x - 1$. Como $f(0) = -1$, ya tenemos que el punto $(0, -1)$ pertenece a su gráfica.



La pendiente es $m = 2$. Realizando el procedimiento indicado en la observación 1.1.3 (desplazarnos un paso hacia la derecha y dos pasos hacia arriba), encontramos otro punto que pertenece a esta recta.





∇

Ejercicio 1.4.

Grafica las siguientes funciones lineales y verifica luego con GeoGebra.

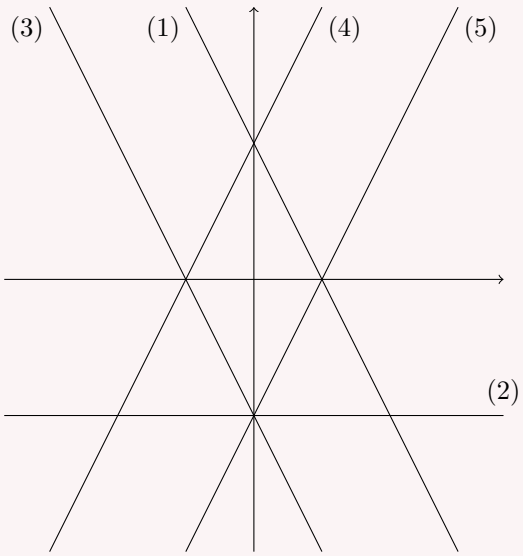
(a) $f_1(x) = -x$.
(b) $f_2(x) = 2x - 1$.
(c) $f_3(x) = 8x$.
(d) $f_4(x) = -\frac{1}{2}x$.
(e) $f_5(x) = x + 4$.
(f) $f_6(x) = -3x + 2$.
(g) $f_7(x) = -3x - 2$.
(h) $f_8(x) = 3x - 2$.
(i) $f_9(x) = 3x + 2$.

Actividad con GeoGebra 1.2.

Se consideran las siguientes funciones:

- $f(x) = 2x + 6$,
- $g(x) = -2x + 6$,
- $h(x) = -2x - 6$,
- $i(x) = 2x - 6$,
- $j(x) = -6$.

1. Cada uno de los siguientes gráficos corresponde a una de las funciones recién indicadas. Asocia cada función con su gráfico.



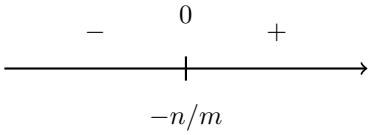
2. Para cada caso, halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
3. En este enlace encontrarás las gráficas de las funciones. Cliqueando en cada cuadrado podrás visualizar cada gráfico y comprobar lo que hiciste.

Raíces y signo de una función lineal

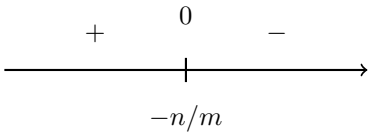
Las raíces de una función f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$ y corresponden a las abscisas de los puntos donde la gráfica de f corta al eje $\overrightarrow{Ox}$. En el caso de una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = mx + n$, con $m \neq 0$, se cumple que la función tiene una única raíz, y es posible encontrarla resolviendo la ecuación correspondiente:

$$mx + n = 0 \iff mx = -n \iff x = -\frac{n}{m}.$$

Si no consideramos su raíz, la función lineal toma valores positivos o negativos. Estudiar el signo de la función significa encontrar los valores de x donde $f(x) > 0$ (la función es positiva) y también los valores de x donde $f(x) < 0$ (la función es negativa). Es evidente que el signo de una función lineal con pendiente $m \neq 0$ depende del signo de m de la siguiente manera:

Signo de $f(x)$ 

si $m > 0$.

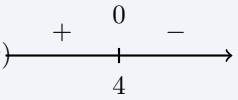
Signo de $f(x)$ 

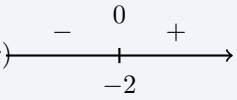
si $m < 0$.

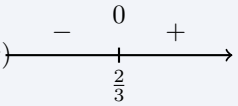
Te sugerimos analizar qué ocurre con las raíces y el signo de f cuando $m = 0$.

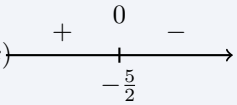
Ejercicio 1.5.

Encuentra funciones lineales f_1, f_2, f_3 y f_4 sabiendo que el signo de cada una de ellas es el que se indica a continuación.

Signo de $f_1(x)$ 

Signo de $f_3(x)$ 

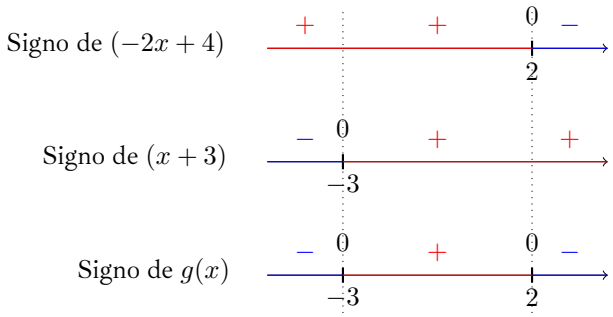
Signo de $f_2(x)$ 

Signo de $f_4(x)$ 

Ejemplo 1.1.4. Queremos estudiar el signo de la función g definida mediante $g(x) = (-2x + 4)(x + 3)$. Si bien esta función no es lineal, se trata de un producto de funciones lineales y, por lo tanto, podremos estudiar su signo recordando la denominada «regla de los signos» para un producto.

$$\underbrace{(-2x+4)}_{A}\ \underbrace{(x+3)}_{B}$$

- Si A y B son del mismo signo, entonces $A.B > 0$
- Si A y B son de distinto signo, entonces $A.B < 0$



El análisis del signo de la función g nos permite concluir que

- $g(x) > 0 \iff -3 < x < 2$.
- $g(x) < 0 \iff x < -3$ o $x > 2$. ∇

Ejercicio 1.6.

Sin graficarlas, estudia el signo de las siguientes funciones.

(a) $f_1(x) = 2x + 4$.
(b) $f_2(x) = -3x + 1$.
(c) $f_3(x) = (2x - 3)(-x + 5)$.
(d) $f_4(x) = (x - 3)(-4x + 4)x$.

1.2 Determinación de una función lineal

En esta sección nos proponemos encontrar la fórmula correspondiente a una función lineal cuando disponemos de cierta información sobre ella. Analizaremos dos casos en concreto: función lineal determinada por un punto y la pendiente y función lineal determinada por dos puntos distintos.

Función lineal determinada por un punto y la pendiente

Queremos hallar la función lineal que tiene pendiente m y cuya gráfica pasa por el punto $A = (x_1, y_1)$. Como la pendiente debe ser m, la función buscada es de la forma $f(x) = mx + n$, con el valor numérico m ya conocido. Lo único que resta es determinar el valor de n. Para ello imponemos la condición de que el punto A pertenece a la recta, es decir, se debe cumplir que $y_1 = f(x_1) = mx_1 + n$. Si despejamos n obtenemos $n = y_1 - mx_1$. La función lineal es entonces $f(x) = mx + y_1 - mx_1$, que puede escribirse como $f(x) = y_1 + m(x - x_1)$. Concluimos que la ecuación de una recta que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y que tiene pendiente m es

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

Ejemplo 1.2.1. Nos interesa encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (3, 1)$ y que tiene pendiente 4. Sabemos que es $y = 1 + 4(x - 3)$, que también puede escribirse en su forma habitual $y = 4x - 11$. ∇

Función lineal determinada por dos puntos

Sabemos que dos puntos distintos determinan una única recta a la cual pertenecen. Nuestro objetivo es encontrar la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos distintos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, siendo $x_1 \neq x_2$. Si analizamos el problema observamos que se puede reducir al caso de *función lineal determinada por un punto y la pendiente*, debido a que la recta en consideración pasa por el punto A y tiene pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Deducimos que su ecuación es

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo 1.2.2. Queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (1, 5)$ y $B = (3, 1)$. En primer lugar calculamos su pendiente: $m = \dfrac{1 - 5}{3 - 1} = -2$. Si la consideramos como la recta que pasa por $A = (1, 5)$ y que tiene pendiente -2 la ecuación queda $y = 5 - 2(x - 1)$, que también puede escribirse como $y = -2x + 7$. Con el fin de

comprobar que lo realizado es correcto, es importante verificar (no dejes de hacerlo), que las coordenadas de ambos puntos verifican dicha ecuación. Si la hubiésemos considerado como recta que pasa por $B = (3, 1)$ y que tiene pendiente -2, la ecuación queda $y = 1-2(x-3)$, que al operar resulta $y = -2x + 7$ (la misma que habíamos encontrado antes). ∇

Observación 1.2.1. Otra forma de resolver el ejemplo 1.2.2

Veamos otra forma de resolverlo sin utilizar la fórmula. Como la recta buscada tiene pendiente $m = -2$, su ecuación es de la forma $y = -2x + n$. Para hallar el valor de n imponemos que las coordenadas del punto $A = (1, 5)$ verifiquen la ecuación. De allí resulta $5 = -2+n$, por lo que $n = 7$, tal como lo habíamos obtenido con el otro procedimiento.

Ejercicio 1.7.

En cada uno de los siguientes casos encuentra la ecuación de la recta que cumple las condiciones indicadas.

(a) Pasa por el punto $(-2, 1)$ y tiene pendiente 2.

(b) Pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente -3.

(c) Pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, 6)$.

(d) Pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-2, 3)$.

Ejercicio 1.8.

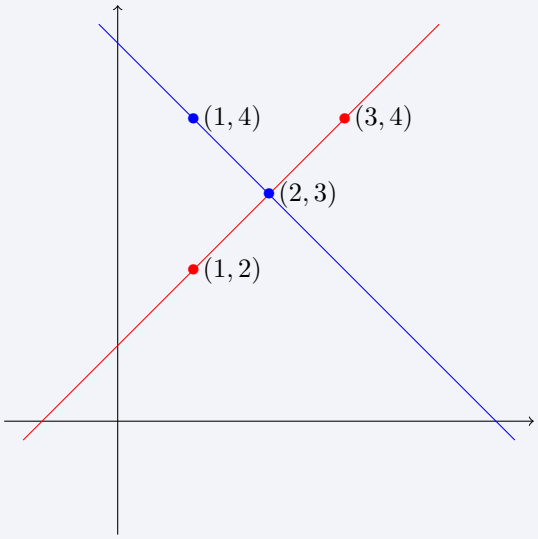
Con los números 1, 2, 3, 4 (sin repetir) escribe el cuadro de valores para una función lineal dada por dos puntos. Ejemplo:

x	$f(x)$
1	2
3	4

$y = x + 1$

x	$f(x)$
1	4
2	3

$y = -x + 5$



(a) ¿Cuántos cuadros de valores distintos hay?

(b) Grafica todas las funciones en un mismo sistema de coordenadas (puedes usar el GeoGebra).

(c) Escribe la fórmula de las funciones lineales (observa que hay casos en los que con distintas parejas de puntos se obtiene la misma recta).

1.3 Intersección de dos rectas en el plano

Dadas dos rectas r_1 y r_2 de ecuaciones $y = a_1x + b_1$ e $y = a_2x + b_2$ respectivamente, queremos hallar la intersección entre ellas, es decir, el conjunto $r_1 \cap r_2$. Para que un punto del plano $P = (x, y)$ pertenezca a la intersección de estas rectas, sus coordenadas deben verificar ambas ecuaciones, es decir, deben ser solución del sistema

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1, \\ y = a_2x + b_2, \end{cases}$$

en el que las incógnitas son x e y. Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Desde los cursos de matemática de enseñanza media sabemos que para un sistema de este tipo se pueden dar solamente tres situaciones.

1. **Sistema compatible determinado.** El sistema tiene una única solución $(\hat{x}, \hat{y})$, por lo que las rectas se intersecan en un solo punto cuyas coordenadas son la solución del sistema, es decir
$$r_1 \cap r_2 \ = \ \{ \, (\hat{x}, \hat{y}) \, \} \, .$$

2. **Sistema compatible indeterminado.** El sistema tiene infinitas soluciones. Esto significa que las dos rectas tienen infinitos puntos en común, por lo que concluimos que coinciden. Es un caso «extremo» de paralelismo. En este caso, r_1 y r_2 son la misma recta,
$$r_1 \cap r_2 \ = \ r_1 = r_2.$$

3. **Sistema incompatible.** El sistema no tiene ninguna solución. No hay parejas (x, y) que verifiquen las dos ecuaciones simultáneamente, por lo que las rectas no tienen puntos en común. Como estamos trabajando en el plano, esto significa que las rectas son paralelas no coincidentes y se cumple que
$$r_1 \cap r_2 \ = \ \emptyset.$$

Ejercicio 1.9.

En cada uno de los siguientes casos halla $r_1 \cap r_2$ e interpreta gráficamente. Luego, puedes verificar en GeoGebra.

(a) $(r_1)\ y = 3x+2$, $(r_2)\ y = -x+6$.
(b) $(r_1)\ y = -2x+3$, $(r_2)\ y = 3x+7$.
(c) $(r_1)\ y = 2x+2$, $(r_2)\ y = 5x-1$.
(d) $(r_1)\ y = x+2$, $(r_2)\ y = x-3$.
(e) $(r_1)\ y = x+2$, $(r_2)\ y = x+2$.
(f) $(r_1)\ x = 3$, $(r_2)\ y = 2x-9$.

Ejercicio 1.10.

Se considera la recta r de ecuación $y = 3x + a$ y la recta s de ecuación $y = ax + b$. Las rectas no tienen ningún punto en común solamente cuando

1. $a = 3$ y $b \neq 3$.
2. $a = 3$ y $b = 3$.
3. $a \neq 3$ y $b = 3$.
4. $a \neq 3$ y $b \neq 3$.

Actividad con GeoGebra 1.3.

Se considera el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y, dependiente de los parámetros $m, n \in \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = mx + n. \end{cases}$$

1. Accediendo al siguiente enlace y utilizando los deslizadores, determina en cada caso un valor de m y otro de n para que el sistema sea
   (a) compatible determinado.
   (b) compatible indeterminado.
   (c) incompatible.
   ¿Para qué valor o valores de m y n el sistema no es compatible determinado?



2. Consideremos ahora el sistema anterior para el caso en que $n = 8$

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = mx + 8. \end{cases}$$

   Accediendo a este enlace y empleando el deslizador, halla en cada caso un valor de m para que el sistema
   (a) tenga como solución al conjunto $\{(3, 2)\}$.
   (b) tenga como solución al conjunto $\{(9, 8)\}$.
   (c) tenga como solución al conjunto $\{(-3, -4)\}$.
   Verifica.



1.4 Funciones lineales de costo, ingreso y utilidad

Funciones lineales de costo

Una cuestión de gran importancia en la administración de una empresa es conocer su estructura de costos. Esto se debe a la necesidad de tener presente la cantidad de dinero que se gasta en cada factor o servicio productivo. Esos flujos de dinero suelen destinarse al pago de sueldos, materias primas, suministros, alquiler, energía, teléfono, calefacción, servicios públicos y otros gastos. La **función de costo total** suele definirse en términos de dos componentes: el costo total fijo (que no depende del tamaño de la producción) y el costo total variable (que depende de la cantidad de unidades producidas). El siguiente problema intenta aclarar estos conceptos.

Ejemplo 1.4.1. Una empresa que elabora un solo tipo de producto quiere determinar el costo total mensual en función de la cantidad de unidades producidas. El área contable de la empresa indica que los gastos fijos del mes son de 45 000 pesos. También ha estimado que por cada unidad producida los costos de materias primas ascienden a $\$\ 5,50$ y que los de mano de obra son de $\$\ 1,50$ en el departamento de montaje, $\$\ 0,75$ en la planta de acabado y de $\$\ 1,25$ en el departamento de empaque y embarque. Si designamos con x a la cantidad de productos fabricados durante el mes, y teniendo en cuenta que todo se mide en pesos, obtenemos:

- costo fijo $= 45\,000$,
- costo variable $= 5,50x + 1,50x + 0,75x + 1,25x = 9x$.

El costo total mensual (que llamaremos $C(x)$) se obtiene al sumar el costo fijo total y el costo variable total. Por lo tanto, $C(x) = 9x + 45\,000$. ∇

El ejemplo 1.4.1 muestra una situación simplificada en la que se supone que los costos variables son directamente proporcionales al tamaño de la producción, o sea, al número de productos fabricados. En el transcurso del curso veremos otros modelos para las funciones de costo que se ajustan mejor a la realidad de las empresas.

Ejercicio 1.11.

En una fábrica el costo por producir una unidad de un determinado artículo es de 3 dólares.

(a) Determina la función C_1 de costos sabiendo que es lineal y no hay costos fijos.

(b) ¿Cuál es el costo de producir r artículos?

(c) Si se duplica la producción a $2r$ artículos, ¿se duplica el costo de producción?

(d) Si se incorporan 30 dólares de costos fijos, encuentra la función C_2 de costo total y determina cuánto cuesta producir r artículos.

(e) Si se duplica la producción a $2r$ artículos, ¿se duplica el costo total de producción de acuerdo con la función C_2?

Funciones lineales de ingreso

Supongamos que el área administrativa de la empresa del ejemplo 1.4.1 decidió fijar el precio de venta de su producto en $ 12 la unidad. El dinero que ingresa por concepto de ventas recibe el nombre de ingreso total. Si se venden todos los artículos producidos, entonces la **función de ingreso** viene dada por $I(x) = 12x$.

Funciones lineales de utilidad

La **función de utilidad** (también llamada función de beneficio) es la diferencia entre la función de ingreso total y la función de costo total. Es decir,

$$Utilidad = Ingreso - Costo$$

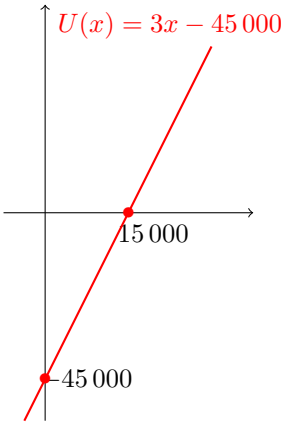
Para el ejemplo 1.4.1 la función de utilidad $U(x)$ es

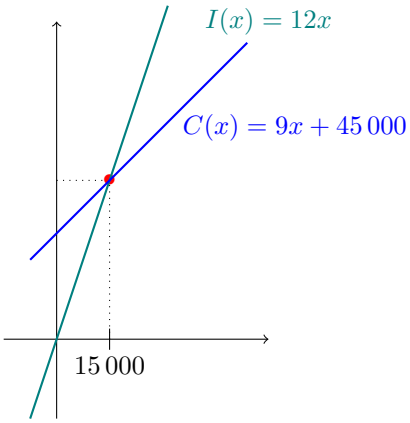
$$U(x) = I(x) - C(x) = 12x - (9x + 45\,000) = 3x - 45\,000.$$

El signo de la utilidad es muy importante, ya que:

- si $U(x) < 0$, entonces hay pérdida.
- si $U(x) > 0$, entonces hay ganancia.

En este caso, se verifica fácilmente que habrá pérdida para $x < 15\,000$, es decir, si se venden menos de 15 000 unidades, y ganancia para $x > 15\,000$, es decir, si se venden más de 15 000 unidades. El punto en el que la utilidad se anula (cuando el costo es igual al ingreso) se denomina **punto de equilibrio** y, en este caso, es de 15 000 unidades. Es posible visualizar la situación de dos maneras: a partir de la gráfica de la función de utilidad o mediante la representación, en un mismo sistema de coordenadas, de las funciones de costo e ingreso.





El problema planteado en el ejemplo 1.4.1 nos permite responder varias preguntas adicionales. Por ejemplo, ¿cuántos artículos hay que vender para obtener una ganancia de \$ 255 000? Lo que queremos es encontrar, si es posible, el valor (o los valores) de x para el cual la utilidad sea de \$ 255 000. Para ello debemos resolver la ecuación $U(x) = 255\,000$.

$$U(x) = 255\,000 \iff 3x - 45\,000 = 255\,000 \iff 3x = 300\,000 \iff x = 100\,000.$$

Para obtener una ganancia de \$ 255 000 se deben vender 100 000 artículos.

Ejercicio 1.12.

Una fábrica vende un solo tipo de producto a \$ 25 cada uno. Los costos variables por unidad son de \$ 2 por concepto de materiales y \$ 6 por concepto de mano de obra. Los costos fijos mensuales ascienden a \$ 34 000.

(a) Encuentra la función de utilidad y grafícala.

(b) ¿Cuántos artículos tiene que vender para que no haya pérdidas?

Ejercicio 1.13.

Una empresa discográfica está a punto de producir un nuevo disco compacto de su artista estelar J. R. Los costos fijos (debidos al diseño de la carátula, el pago a músicos de sesión, la grabación, el matrizado digital, etcétera) ascienden a 5000 dólares. El costo de fabricación es de 1 dólar por unidad y a J. R. se le pagará 1 dólar por cada disco vendido. El precio al que la empresa vende sus discos a los distribuidores es de 12 dólares por unidad.

(a) Halla la función de utilidad de la empresa para este emprendimiento.

(b) ¿Cuál es la cantidad mínima de discos que deben venderse para que este emprendimiento no genere pérdidas?

(c) Si esta producción llega a Disco de Oro (5000 discos vendidos), ¿cuál es la ganancia de la discográfica? ¿Y la de J. R.?

Ejercicio 1.14.

Se sabe que la función de costos de una empresa se puede representar mediante una función lineal. Los costos fijos ascienden a $ 20 000 y los costos variables por producir 2000 unidades son de $ 4000. Por otra parte, se sabe que el precio de venta del único producto que produce y vende la empresa es de $ 7 por unidad.

(a) Determina las funciones de costo, ingreso y utilidad de la empresa. Represéntalas gráficamente.

(b) Halla el nivel de producción a partir del cual las ganancias superan los $ 15 000.

(c) Halla el nivel de producción en el cual los ingresos triplican los costos.

Ejercicio 1.15.

Una persona tiene el auto roto y debe alquilar otro rápidamente. Le ofrecen dos opciones (en ambas los montos están en dólares):
Opción A: Pagar 3 por cada km recorrido.
Opción B: Pagar 200 por el alquiler (independientemente de los kilómetros recorridos), más 2 por cada km recorrido.

(a) Determina cuánto pagaría en cada opción por recorrer x kilómetros.

(b) Representa gráficamente las dos funciones halladas en la parte anterior.

(c) ¿Cuál opción resulta más barata si viaja solo de ida desde Montevideo (*i*) a la ciudad de San José? (*ii*) a la ciudad de Artigas?

(d) ¿Cuántos kilómetros tendría que recorrer para que cueste lo mismo una opción que otra? Interpreta gráficamente.

Ejercicio 1.16.

Una empresa debe adquirir una máquina para producir un nuevo producto. Se le presentan dos opciones:
Opción A: Comprar una máquina vieja a un costo de 500 dólares. Con esta máquina podrá producir a un costo de 2 dólares la unidad.
Opción B: Comprar una máquina nueva a un costo de 1200 dólares. Con esta, el costo de producción es de 1 dólar por unidad.
Discute, según el número de unidades producidas, cuál de las dos opciones es más conveniente.

Ejercicio 1.17.

Una familia quiere comer lechón en la cena de fin de año. Se le plantean dos opciones:
Opción A: Comprarlo crudo en la carnicería a un costo de 190 pesos el kilo y llevarlo a condimentar y cocinar a la panadería a un costo de 930 pesos, independientemente de los kilos de lechón que se lleven.
Opción B: Comprar lechón preparado cuyo costo es de 380 pesos el kilo.

(a) Encuentra las funciones que expresan el costo en función de los kilos de lechón que se adquieran para cada una de las dos opciones.

(b) ¿Cuánto será el costo en cada opción si la familia estima que se comerán tres kilos de lechón?

(c) Si se piensa que se van a recibir invitados y que cada invitado comerá medio kilo de lechón, discute cuál de las dos opciones es más conveniente según la cantidad de invitados recibidos (recuerda que la familia sola comerá tres kilos de lechón).

(d) Si al terminar la fiesta se gastaron 2260 pesos y se optó por la opción más barata, ¿cuántos fueron los invitados?

Ejercicio 1.18.

Un empresario está estudiando la posibilidad de producir productos panificados. Para ello, necesita comprar una máquina cuya amortización representará un costo fijo de $ 2000 mensuales. Utilizando dicha máquina el costo por unidad panificada es de $ 3. Además, el fabricante paga $ 4000 mensuales por el alquiler del local. Los productos panificados se venden a $ 9 la unidad y todo lo que se produce se vende.

(a) Halla las funciones de costos, ingresos y utilidades mensuales en función del número de unidades producidas y vendidas. Calcula la producción mensual de equilibrio e interpreta gráficamente.

(b) Si en lugar de adquirir la máquina pudiera contratar mano de obra a destajo que le implicara un costo adicional por unidad panificada de $ 0, 50. Calcula las funciones de costos, ingresos y utilidades mensuales con este otro sistema de trabajo.

(c) Discute, en función del número de unidades producidas y vendidas por mes, cuál de los dos sistemas (con máquina o con mano de obra a destajo) es más conveniente.

Ejercicio 1.19.

Una señora decide comenzar una pequeña producción de galletas para vender. Sabe que, si las elabora en su casa, el costo total es de $ 22 por 4 galletas y de $ 100 por 30 galletas.

(a) Halla la función de costo total sabiendo que es lineal.

(b) El panadero de su barrio le ofrece otra opción que consiste en utilizar las instalaciones de su panadería, por lo que le cobraría $ 60 y además, como él compra las materias primas a granel, los materiales para hacer una galleta le saldrían $ 0,50. Halla el costo total con esta segunda opción.

(c) ¿Qué cantidad de galletas tendría que hacer para que fuera indiferente hacerlas en la panadería o en su casa?

(d) Si necesariamente debiera hacer 50 galletas para un pedido ¿cuál opción le convendría más?

(e) Si el precio de venta de cada galleta es de $ 8, ¿a partir de qué cantidades tendrá ganancia en cada opción?

1.5 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 1.20.

Un turista decide alquilar un auto y en la rentadora le ofrecen dos opciones para un mismo coche:
Opción A: Alquilar a $3,5$ dólares por kilómetro recorrido.
Opción B: Hacer un pago de 100 dólares y pagar $1,5$ dólares por kilómetro recorrido.
¿Para qué cantidad de kilómetros resultan indistintas las dos opciones?

1. 50.
2. 75.
3. 100.
4. 175.

Ejercicio 1.21.

Una empresa se dedica a un solo tipo de producto que vende a $ 30 la unidad. Los costos variables por unidad son de $ 10 y los costos fijos son de $ 20 000. Si se sabe que las utilidades fueron de $ 100 000, ¿cuántas unidades se vendieron?

1. 3000.
2. 6000.
3. 5000.
4. 12 000.

Ejercicio 1.22.

Una empresaria está estudiando la posibilidad de elaborar productos envasados. Para ello requiere alquilar una máquina a $ 4500 mensuales. Utilizando dicha máquina, el costo por unidad es de $ 5. Además, paga $ 12 000 mensuales por el alquiler del local. Los productos envasados se venden a $ 25 la unidad y todo lo que se produce se vende. Entonces la producción mensual de equilibrio es

1. 825.
2. 600.
3. 225.
4. 660.

Ejercicio 1.23.

Se consideran la recta r de ecuación $y = 2x + a$ y la recta s de ecuación $y = ax + b$. Si el único punto en común es $(2, 3)$ entonces

1. $a = 4$ y $b = 5$.
2. $a = -4$ y $b = 5$.
3. $a = -1$ y $b = 1$.
4. $a = -1$ y $b = 5$.

Ejercicio 1.24.

Se considera la recta r que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(4,-2)$ y la recta s que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(3,6)$. Entonces el único punto común a ambas rectas es

1. $(1,4)$.
2. $(2,5)$.
3. $\left(\frac{3}{2},3\right)$.
4. $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Capítulo 2

Funciones cuadráticas

En los modelos de costos e ingresos que presentamos en el capítulo 1 siempre asumimos que el precio de cada artículo era fijo y que la única variable en consideración era el tamaño de la producción. Otro modelo económico muy interesante consiste en considerar que la demanda de determinado artículo (esto es, el número de productos que el mercado está dispuesto a comprar) depende del precio que se le fije, ya que es razonable pensar que cuanto mayor sea el precio, menor será la demanda. Si designamos con p al precio de cada unidad, la demanda será una función que depende de esta variable p y que simbolizaremos $D(p)$.

Ahora bien, ¿cómo hacemos para calcular el ingreso de la empresa? El razonamiento es muy simple: si se venden $D(p)$ unidades y el precio de cada una es p, entonces la función de ingreso total (debido a esa venta) se obtiene multiplicando ambas cantidades: $I(p) = pD(p)$. Si consideramos el caso más sencillo de una demanda lineal dada por $D(p) = ap+b$, entonces la función de ingreso correspondiente queda $I(p) = pD(p) = p(ap + b) = ap^2 + bp$, que no es una función lineal, sino una función polinómica de segundo grado.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=-_aIL01Maz0&t=15s`
(Funciones cuadráticas parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=0pMhH0c41ho`
(Funciones cuadráticas parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=vquda3Lr9Gw`
(Funciones cuadráticas parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=XrgoU7uPuhQ&t=8s`
(Funciones cuadráticas parte 4)

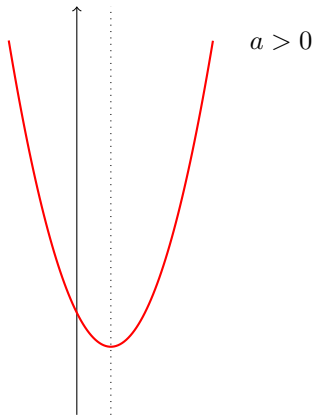
2.1 Funciones cuadráticas y sus gráficas

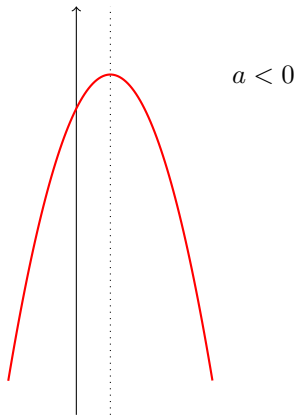
Definición 2.1.1. Funciones cuadráticas
Se dice que una función f es **cuadrática** *cuando su dominio es $\mathbb{R}$ y existen constantes $a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, tales que $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.*

Admitiremos los siguientes resultados que seguramente conozcas de cursos previos, aunque más adelante los deduciremos utilizando el concepto de derivada de una función.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ entonces se cumple que:

- su gráfica es una parábola de eje paralelo al eje $\overrightarrow{Oy}$
- la abscisa del vértice viene dada por $x_V = \dfrac{-b}{2a}$
- la ordenada del vértice se obtiene calculando $y_V = f(x_V)$
- la concavidad de la parábola es positiva cuando $a > 0$ y es negativa cuando $a < 0$





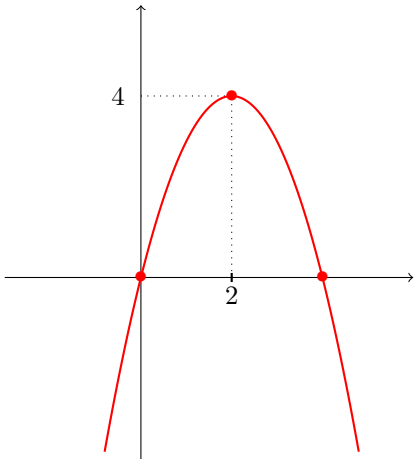
Ejemplo 2.1.1. Queremos graficar la función $f(x) = -x^2 + 4x$. En primer lugar, reconocemos que la función f cumple con la definición 2.1.1 con $a = -1$, $b = 4$ y $c = 0$. Su gráfica es entonces una parábola de eje paralelo al eje $\overrightarrow{Oy}$. Como $a < 0$, su concavidad es negativa.

Las coordenadas de su vértice las calculamos de la siguiente manera:

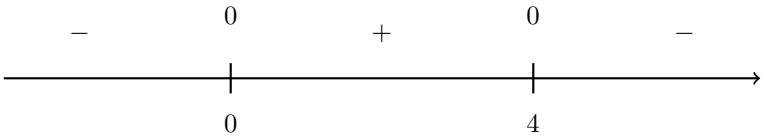
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2, \qquad y_V = f(2) = 4.$$

Para hallar los puntos de corte con el eje $\overrightarrow{Ox}$ calculamos las raíces de la función, es decir:

$$f(x) = 0 \iff -x^2 + 4x = 0 \iff x(-x+4) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 4.$$



Observemos que el signo de esta función es el siguiente:



∇

Ejercicio 2.1.

La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx - 1$ tiene vértice $V = (1, 2)$. Entonces

1. $a > 0$ y $b > 0$.
2. $a < 0$ y $b > 0$.
3. $a < 0$ y $b < 0$.
4. $a > 0$ y $b < 0$.

Observación 2.1.1. El caso particular en que $b = 0$
Cuando la función es de la forma $f(x) = ax^2 + c$ (o sea $b = 0$), entonces la abscisa del vértice vale $x_V = \dfrac{-b}{2a} = 0$. En este caso tenemos que el eje de la parábola es el eje $\overrightarrow{Oy}$ y la ordenada del vértice vale $y_V = f(0) = c$.

Actividad con GeoGebra 2.1.

Consideremos funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$, con $a \neq 0$. Accediendo a este enlace puedes observar el comportamiento de las gráficas de dichas funciones al cambiar los deslizadores a y c.

1. Tomando el valor $a = 1$, enuncia una observación sobre el comportamiento de los gráficos de estas funciones al variar c.
2. Fijando ahora el valor $c = 0$, enuncia una observación sobre el comportamiento de los gráficos al variar a.

2.2 Raíces y signo de una función cuadrática

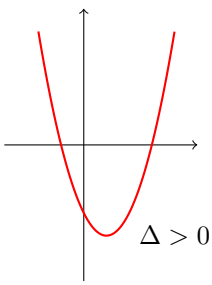
Raíces de una función cuadrática

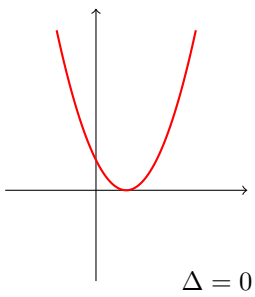
En el ejemplo 2.1.1 hallamos las raíces de la función de una manera muy simple debido a que su expresión estaba factorizada. El estudio de las raíces de las funciones cuadráticas se remonta a la Antigüedad, y la fórmula para hallarlas es muy conocida. Por eso, vale la pena tener presente la fórmula que permite encontrar las raíces de un polinomio de segundo grado, en caso de que existan:

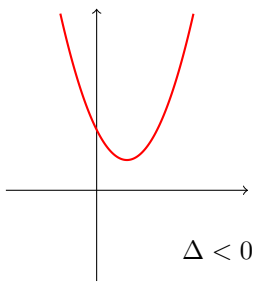
$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Está claro que la existencia de raíces depende del signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Se pueden dar tres casos.

1. Si $\Delta > 0$, entonces la función tiene dos raíces reales y distintas. Su gráfica corta al eje $\overrightarrow{Ox}$ en dos puntos.
2. Si $\Delta = 0$, entonces la función tiene una sola raíz. Su gráfica corta al eje $\overrightarrow{Ox}$ en un solo punto.
3. Si $\Delta < 0$, entonces la función no tiene raíces reales. Su gráfica no corta al eje $\overrightarrow{Ox}$.







Ejemplo 2.2.1. Queremos hallar las raíces de la función $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Para eso aplicamos la fórmula.

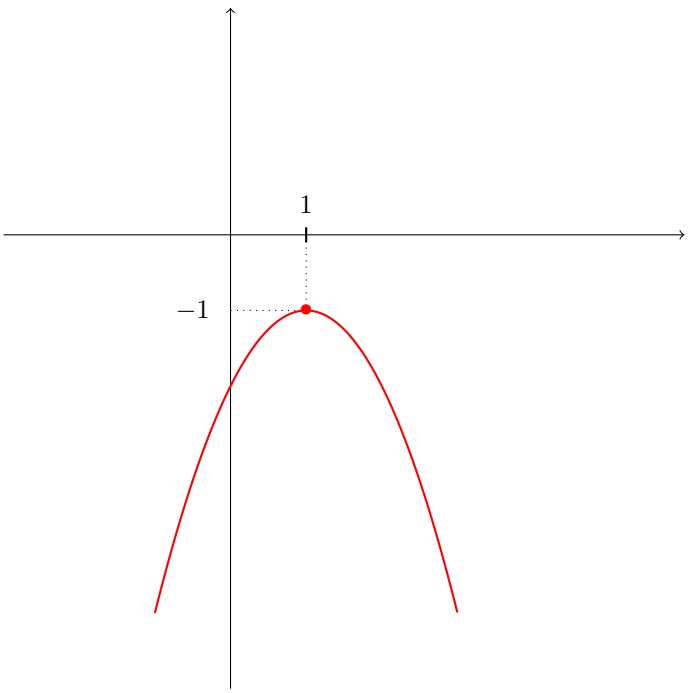
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(-3)}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}.$$

Las raíces de f son entonces $\frac{1}{2}$ y -3. ∇

Ejemplo 2.2.2. Queremos hallar las raíces de la función $g(x) = -x^2 + 2x - 2$. Se tiene:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{-2}.$$

Como el discriminante es negativo, esta función cuadrática no tiene raíces reales. Teniendo en cuenta que tiene concavidad negativa y que su vértice es el punto $V = (1, -1)$, podemos observar que su gráfica no corta al eje $\overrightarrow{Ox}$.



∇

Actividad con GeoGebra 2.2.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.
A partir del applet que puedes encontrar en este enlace, utiliza los deslizadores para hallar (en caso de que sea posible), lo que se pide en cada uno de los siguientes apartados.

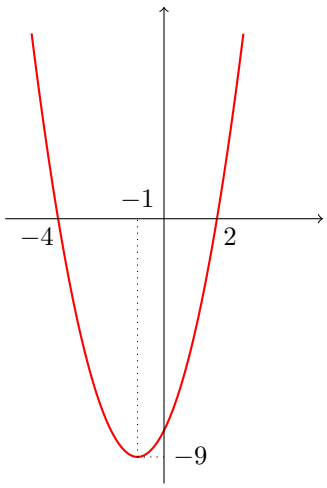
1. La expresión analítica de una función cuadrática cuyo eje de simetría sea el eje Oy.
   (a) ¿Cuántas funciones cuadráticas cumplen con esta condición?
   (b) ¿Qué condiciones deben cumplir sus expresiones analíticas?
2. La expresión analítica de una función cuadrática cuyo eje de simetría sea Oy y además
   (a) no tenga raíces reales y su vértice sea el punto $(0, 3)$. ¿Es única?
   (b) tenga dos raíces reales positivas.
   (c) no tenga raíces reales y su vértice sea el punto $(-2, 0)$.
   (d) tenga raíz 0.
3. La expresión analítica de una función cuadrática que corte al eje Oy en $y = 2$.
   (a) ¿Cuántas funciones cuadráticas cumplen con esta condición?
   (b) ¿Qué condiciones deben cumplir sus expresiones analíticas?
4. La expresión analítica de una función cuadrática que corte al eje Oy en $y = 2$ y además
   (a) tenga concavidad positiva y no tenga raíces reales.
   (b) tenga concavidad positiva y tenga dos raíces reales distintas.
   (c) tenga concavidad negativa y su vértice sea el punto $(1, 3)$.
5. La expresión analítica de una función cuadrática que tenga raíz 0 y además
   (a) tenga concavidad negativa y 0 sea su única raíz.
   (b) tenga concavidad positiva y la abscisa del vértice sea $x = -2$. ¿Es única?
   (c) tenga concavidad positiva y su vértice sea el punto $(-2, -4)$. ¿Es única?
   (d) tenga concavidad negativa y su vértice sea el punto $(-2, -4)$. ¿Es única?

Descomposición factorial

De manera general, la descomposición factorial de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios del menor grado posible. En el caso de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, es evidente que la única manera posible de descomponer la función es como producto de dos funciones lineales. En el caso de que existan sus raíces, que denotamos como α y β, la función f puede expresarse mediante la siguiente descomposición factorial:

$$f(x) = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta).$$

Ejemplo 2.2.3. Queremos graficar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = (x-2)(x+4)$. ¿Es necesario desarrollar y encontrar la abscisa del vértice utilizando la fórmula correspondiente? No, no es necesario, se puede hacer de una manera más sencilla. Como la función ya está factorizada, sin hacer ninguna cuenta deducimos que sus raíces son 2 y -4. Debido a la simetría de la parábola, la abscisa del vértice se encuentra en el punto medio de sus dos raíces y, por lo tanto, $x_V = -1$. La ordenada del vértice vale $f(-1) = -9$, que es el mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$. ¿Tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$?



∇

Ejercicio 2.2.

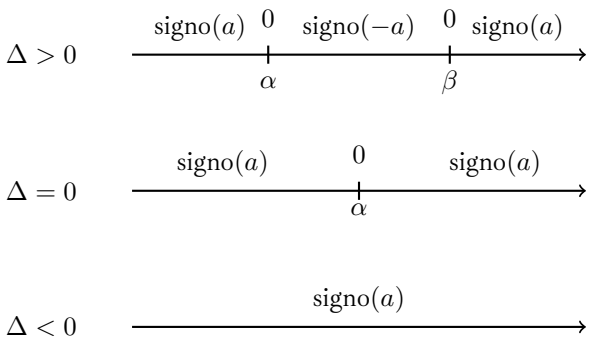
Halla las coordenadas del vértice de la función cuadrática dada por $f(x) = 2(x-1)(x-5)$.

Ejercicio 2.3.

Sea f la función cuadrática cuyas raíces son -2 y -4, y que cumple $f(1) = 14$. Encuentra el mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$. ¿La función f tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$?

Signo de una función cuadrática

Resulta claro que el signo de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende de la cantidad de raíces que tenga (por lo tanto del valor del discriminante), así como del signo del coeficiente a. Se obtienen los siguientes tres casos:



Actividad con GeoGebra 2.3.

Se consideran las funciones definidas en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x - 10,$$
$$g(x) = x^2 + b_2x - 3,$$
$$h(x) = a_3x^2,$$
$$i(x) = a_4x^2 - 16a_4,$$

con a_1, a_3 y a_4 distintos de 0.

En este enlace accedes al sitio donde están representadas varias funciones lineales (cliqueando sobre las casillas de control puedes desplegar el gráfico de la función seleccionada). Teniendo en cuenta que las funciones f, g, h e i tienen su descomposición factorial de acuerdo a las funciones lineales graficadas en el enlace (cada función lineal participa en una sola de las descomposiciones factoriales), realiza las actividades que se presentan a continuación.

1. Asocia cada función cuadrática con el par de funciones lineales que dan su descomposición factorial. Observa que es posible completar esta parte utilizando únicamente los gráficos de las funciones, sin necesidad de recurrir a sus fórmulas. Por ejemplo, para la función f, se tiene que las funciones lineales que intervienen en su descomposición factorial son r_1 y r_2. Nos damos cuenta de esto porque la única manera de obtener el término independiente -10 de f es que el producto de los términos independientes de las funciones lineales sea -10.
2. Halla raíces y estudia el signo de cada función cuadrática, sin haber determinado sus coeficientes.
3. Escribe la descomposición factorial de cada función cuadrática. Observa que, si por ejemplo una función k está dada por $k(x) = (3x+5)(x-2)$, entonces se puede escribir como $k(x) = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x-2)$.
4. Determina los coeficientes de las funciones cuadráticas y analiza la coherencia con lo obtenido en la parte 2.

Ejercicio 2.4.

Grafica y estudia el signo de las siguientes funciones cuadráticas. Luego verifica con GeoGebra.

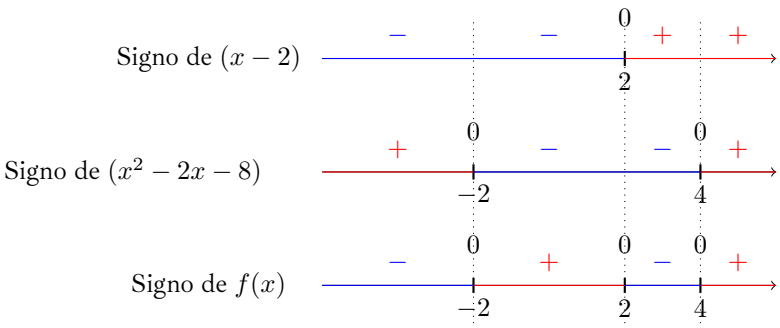
(a) $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$.
(b) $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$.
(c) $f_3(x) = x^2 - 3$.
(d) $f_4(x) = -x^2 + 4$.
(e) $f_5(x) = 2x^2 + 6x$.
(f) $f_6(x) = 3x^2 + 3x + 6$.

Ejemplo 2.2.4. Queremos estudiar el signo de la función $g(x) = (x-2)(x^2-2x-8)$. ¿Es necesario desarrollar el producto de los polinomios? En este caso no: como la función está factorizada, podemos utilizar la regla de los signos para un producto.

$$\underbrace{(x-2)}_{A}\ \underbrace{(x^2-2x-8)}_{B}$$

- Si A y B son del mismo signo, entonces $A\,B > 0$
- Si A y B son de distinto signo, entonces $A\,B < 0$

La idea es estudiar el signo de cada factor y luego «multiplicar» los signos.



∇

Ejercicio 2.5.

Estudia el signo de las siguientes funciones.

(a) $f_1(x) = (x^2 - 5x + 6)x$.
(b) $f_2(x) = (x^2 - 4)(x + 3)$.
(c) $f_3(x) = (x^2 + 2x + 2)(-x + 2)$.
(d) $f_4(x) = (-x^2 - 2x - 1)(x^2 + 4x - 5)$.

Ejercicio 2.6.

Halla la intersección de

(a) la parábola de ecuación $y = 2x^2 - 3x + 2$ y la recta $y = 3x - 2$.

(b) las parábolas de ecuaciones $y = x^2 + x + 1$ e $y = -x^2 + 3x + 5$.

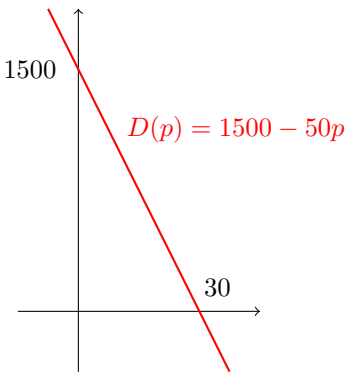
Ejercicio 2.7.

La gráfica de la función cuadrática f es una parábola con vértice $(1, 0)$ que corta al eje $\overrightarrow{Oy}$ en el punto $(0, 2)$. Por otra parte, g es la función dada por $g(x) = -x^2 + 2x$. Entonces, la intersección de las gráficas de f y g

1. son dos puntos, ambos con abscisas positivas.
2. es vacía.
3. es solo un punto.
4. son dos puntos, uno con abscisa negativa y otro con abscisa positiva.

2.3 Demanda e ingreso en función del precio

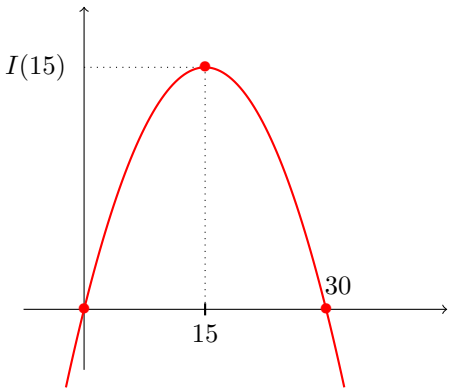
Ejemplo 2.3.1. Supongamos que, a partir de una serie de encuestas, una empresa ha estimado que la demanda de uno de sus artículos depende del precio p según la función $D(p) = 1500 - 50p$. Desde la perspectiva de la empresa, solo tiene sentido considerar valores de p para los cuales $D(p) \geq 0$, es decir, $p \leq 30$. Además, como la variable p representa el precio del artículo, debemos considerar $p \geq 0$. El denominado dominio restringido de la función de demanda es, en este caso, el conjunto de valores del precio p que verifican $0 \leq p \leq 30$. Observemos que, cuando el precio es $p = 0$, la demanda es de 1500 artículos y decrece hasta llegar al valor 0 cuando el precio es $p = 30$.



Como observamos en la introducción del capítulo, el ingreso también es función de p y viene dado por

$$I(p) \;=\; p\,D(p) \;=\; p\,(1500 - 50p) \;=\; -50p^2 + 1500p.$$

Al área administrativa de la empresa le interesa conocer si existe algún precio del artículo para que el ingreso de la empresa sea máximo. Para resolver este problema, graficamos la función $I(p)$, teniendo en cuenta que solo nos interesará la región correspondiente a valores de precios p comprendidos entre 0 y 30.



No cabe duda entonces que el mayor valor de $I(p)$ se obtiene para el precio $p = 15$. Realizando los cálculos correspondientes, se obtiene que el ingreso máximo vale $I(15) = 11\,250$. ∇

2.4 Costos y utilidad en función del precio

Ejemplo 2.4.1. En el ejemplo 2.3.1 hallamos el precio que maximiza el ingreso de la empresa, pero no consideramos los costos de producción. Un problema más cercano a la realidad consiste en averiguar qué precio debe fijarse para que la utilidad sea máxima. Para intentar resolver este nuevo problema, debemos agregar información al modelo. Supongamos, entonces, que la función de costos por producir x artículos es $C(x) = 3750 + 2x$. Como la empresa conoce la función de demanda $D(p)$, es razonable pensar que, dado un precio p, fabricará la cantidad de unidades que se pueden vender a ese precio; esa cantidad es, precisamente, $D(p)$. Por lo tanto, para obtener la función de costos asociada a la venta del artículo a un precio p, sustituimos x por $D(p)$ en la expresión $C(x)$:

$$C(p) = 3750 + 2(1500 - 50p) = 6750 - 100p.$$

La función de utilidad resulta ser

$$U(p) = I(p) - C(p) = -50p^2 + 1600p - 6750.$$

Verifica que su máximo se obtiene cuando el precio es $p = 16$ y que la utilidad para ese precio es $U(16) = 6050$. Conviene señalar que, al agregar la función de costos y, por lo tanto, modificar el modelo, el precio óptimo aumenta y la cantidad demandada disminuye. ∇

Esta manera de generar una nueva función $C(p)$ aplicando sucesivamente dos funciones conocidas se retomará en el capítulo 3.

Ejercicio 2.8.

La función de demanda de determinado artículo es $D(p) = 3000 - 3p$, donde p es el precio por unidad (medido en pesos).

(a) Halla la función de ingreso y grafícala.

(b) ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla dicho ingreso máximo.

(c) La empresa tiene un costo fijo de $ 100 000 y un costo variable de $ 4 por cada artículo que produce. Encuentra el precio que se le debe asignar al artículo para que la utilidad sea máxima. Calcula dicha utilidad.

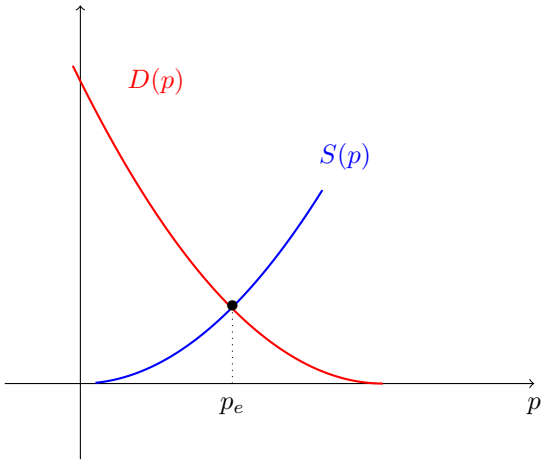
Ejercicio 2.9.

Una empresa tiene un costo fijo de 175 dólares y un costo variable de 2 dólares por unidad producida. La demanda en función del precio viene dada por $D(p) = -5p + 100$. Encuentra el precio que se le debe asignar al artículo para que la utilidad sea máxima. Calcula dicha utilidad.

2.5 Ley de oferta y demanda

La ley de la oferta y la demanda es el principio básico sobre el que se apoya una economía. Esta ley refleja la relación entre la demanda de un artículo, la cantidad ofrecida y el precio al que se comercializa. Seguimos considerando un modelo referido a un solo tipo de bien. Por un lado, tenemos el grupo de compradores y, por otro, el de vendedores (la empresa o fábrica que produce y vende dicho bien). La cantidad de artículos que los compradores están dispuestos a comprar es la función de demanda, mientras que la cantidad de artículos que la empresa está dispuesta a fabricar es la función de oferta. Ambas funciones dependen, entre otras variables que no consideraremos aquí, del precio que se fije para el artículo. Para la gran mayoría de las empresas, se cumple que, cuanto mayor sea el precio, más artículos estarán dispuestas a producir. Por lo tanto, la función de oferta crece a medida que el precio aumenta.

Tenemos, por un lado, lo que la empresa está dispuesta a ofrecer y, por otro, lo que el mercado está dispuesto a comprar. Los puntos en que ambas cantidades coinciden se denominan **puntos de equilibrio** de esta microeconomía.



Designemos con $S(p)$ y $D(p)$ respectivamente a las funciones de oferta y de demanda del artículo en cuestión. Para encontrar los eventuales puntos de equilibrio entre oferta y demanda debemos entonces resolver la ecuación $S(p) = D(p)$, que es equivalente a la ecuación $S(p) - D(p) = 0$.

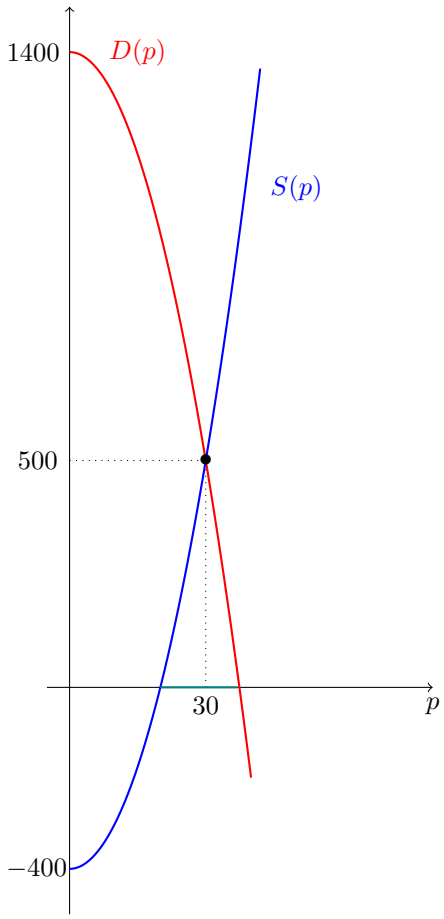
Ejemplo 2.5.1. Supongamos que para $20 \leq p \leq 37$, las funciones de demanda y oferta de determinado artículo son $D(p) = -p^2 + 1400$ y $S(p) = p^2 - 400$ respectivamente. A partir de este modelo queremos hallar los puntos de equilibrio. Para ello resolvemos la ecuación $S(p) = D(p)$.

$$D(p) = S(p) \iff -p^2+1400 = p^2-400 \iff 1800 = 2p^2 \iff p^2 = 900 \iff p = \pm 30.$$

De los dos valores de p hallados, el único que se encuentra en el intervalo $[20, 37]$ es $p = 30$. Se deduce que el precio de equilibrio es $p_e = 30$. A los efectos de verificar calculemos $S(30)$ y $D(30)$:

- $D(30) = -(30)^2 + 1400 = -900 + 1400 = 500$,
- $S(30) = 30^2 - 400 = 900 - 400 = 500$.

La cantidad de equilibrio del mercado es entonces $S(30) = D(30) = 500$ artículos.



Conviene aclarar las razones por las cuales, en el planteo del problema, solo se consideraron precios p pertenecientes al intervalo $[20, 37]$. Como lo habíamos destacado en el ejemplo 2.3.1, desde el punto de vista económico solo tiene sentido considerar precios $p \geq 0$ para los cuales la función de demanda $D(p)$ sea no negativa y decreciente. Dejamos como ejercicio verificar que eso ocurre solamente cuando $0 \leq p \leq \sqrt{1400}$. A su vez, al mismo tiempo debemos considerar precios para los cuales la función de oferta $S(p)$ sea no negativa y creciente. Esto último ocurre para $p \geq 20$. Por lo tanto, ambas condiciones se cumplen solamente para $20 \leq p \leq \sqrt{1400}$. Resulta entonces que el problema tiene sentido económico cuando $p \in [20, \sqrt{1400}]$. Como el número $\sqrt{1400}$ es irracional, podemos considerar el

mayor número natural menor que $\sqrt{1400}$, que es el número 37. Es por ello que el dominio restringido, considerando todas las condiciones, asociado a este problema es el intervalo $[20, 37]$, destacado en color verde en la figura. ∇

Ejercicio 2.10.

En un mercado se conoce que la oferta en función del precio es una función cuadrática. Se sabe que el vértice de dicha función está en el punto $(0, -100)$ y que una de las raíces de la función es 10.

(a) Halla la función de oferta y determina el dominio restringido.

(b) ¿Cuál es la cantidad ofertada a un precio de \$ 20?

(c) ¿Para qué precio la oferta es de 800 artículos?

(d) Si sabemos además que la función de demanda es $D(p) = -p^2 + 6p + 1000$, halla el punto de equilibrio.

(e) ¿A partir de qué nivel de precios la cantidad ofrecida supera la cantidad demandada?

Ejercicio 2.11.

Una empresa produce un artículo cuya función de oferta es lineal, se ofrecen las cantidades 120 y 160 para los precios de \$ 1 y \$ 2 por unidad, respectivamente. La demanda viene dada por $D(p) = 50p^2 - 500p + 1250$. Encuentra el precio de equilibrio.

Ejercicio 2.12.

La demanda de un cierto artículo puede modelarse mediante la función $D(p) = p^2 - 100p + 2500$. La función de oferta de dicho artículo es lineal. El equilibrio entre oferta y demanda se da a un precio de \$ 30 y se sabe que la oferta es nula a un precio de \$ 20. Consideramos $p \in [20, 50]$. Calcula la oferta correspondiente a un precio de \$ 40.

Ejercicio 2.13.

Una empresa produce un artículo cuyo costo variable es de \$ 3 por unidad producida. El ingreso, en función de la cantidad de artículos producidos, es una función cuadrática cuya gráfica tiene vértice en $(0, 0)$ y pasa por $(1, 1)$. El punto de equilibrio se alcanza cuando se producen 50 artículos. Encuentra el costo fijo de la empresa.

Ejercicio 2.14.

Para determinado producto, la oferta en función del precio es cuadrática. Además, dicha oferta es 0 si el precio es 0 y es de 200 artículos si el precio es de $ 1. La demanda es lineal y se anula si el precio es de $ 24. Para un precio de $ 20 la demanda es de 400 artículos. El equilibrio se alcanza para un precio de $ 4. Calcula el valor de la oferta para un precio de $ 5.

Ejercicio 2.15.

La oferta de un artículo en función del precio p es una función cuadrática $S(p)$ con raíz doble 0 y tal que la oferta es de 100 artículos para un precio de $ 10. La demanda en función del precio p es $D(p) = p^2 - 20p + 100$. Entonces, el precio de equilibrio es

1. $ 1.
2. $ 2,5.
3. $ 5.
4. $ 10.

2.6 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 2.16.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Su gráfica es una parábola de vértice (α, β). Entonces

1. $\alpha < 0$ y $\beta < 0$.
2. $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.
3. $\alpha < 0$ y $\beta > 0$.
4. $\alpha > 0$ y $\beta < 0$.

Ejercicio 2.17.

Halla el valor del número a para que la función $f(x) = 3(ax + 1)x$ tenga raíz 1. Para el valor de a hallado la gráfica de f es

1. una parábola con concavidad positiva y vértice $(1/2, 3/4)$.
2. una parábola con concavidad positiva y vértice $(-1/2, -9/4)$.
3. una parábola con concavidad negativa y vértice $(1/2, 3/4)$.
4. una parábola con concavidad negativa y vértice $(-1/2, -9/4)$.

Ejercicio 2.18.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuadrática con raíces -1 y -2 y tal que $f(0) = 4$. Entonces

1. el máximo de f se alcanza en $x = -3/2$.
2. el mínimo de f se alcanza en $x = 1/2$.
3. el mínimo de f se alcanza en $x = -3/2$.
4. la función f no tiene mínimo en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.19.

Una empresa tiene un costo fijo de \$ 25 y un costo variable de \$ 2 por unidad producida. La demanda es lineal en función del precio y cumple que $D(p) = -2p + 80$. Entonces, el precio que maximiza la utilidad es

1. \$ 20.
2. \$ 21.
3. \$ 22.
4. \$ 42.

Ejercicio 2.20.

Sea f una función cuadrática cuya gráfica tiene vértice en el punto $(-3, -16)$ y tal que $f(0) = -7$. Entonces f

1. no tiene raíces reales.
2. tiene dos raíces negativas.
3. tiene dos raíces de distinto signo.
4. tiene una raíz doble.

Ejercicio 2.21.

Una empresa produce un artículo cuya oferta puede representarse mediante una función lineal. Para precios de \$ 2 y \$ 3 por unidad, las cantidades ofrecidas son 160 y 200, respectivamente. La demanda viene dada por $D(p) = 50p^2 - 500p + 1250$. Entonces el precio de equilibrio es

1. \$ 1.
2. \$ 2.
3. \$ 3.
4. \$ 5.

Ejercicio 2.22.

Sea f una función cuadrática tal que 4 es una de sus raíces y cuya gráfica tiene como vértice el punto $(2, -4)$. Sea g otra función cuadrática tal que su gráfica es una parábola cuyo vértice es el origen de coordenadas, $(0, 0)$, y que además pasa por el vértice de f. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = f(x) + g(x)$. Entonces la función h

1. tiene exactamente dos raíces, una es positiva y la otra es negativa.
2. tiene dos raíces, una es positiva y la otra es 0.
3. tiene exactamente tres raíces.
4. tiene una sola raíz.

Capítulo 3

Más sobre funciones

En el ejemplo 2.4.1 habíamos considerado la demanda de determinado artículo definida por una función $D(p)$ dependiente del precio p que se le asignaba al artículo. También habíamos incorporado como dato adicional una función $C(x)$, que representaba la función de costos de la empresa por producir x artículos. Con esta información, ¿cómo procedimos para hallar el costo en función del precio p? El razonamiento realizado fue el siguiente: dado un precio p, es razonable pensar que la empresa fabricará la cantidad de unidades que se pueden vender a ese precio y esa cantidad es, precisamente, $D(p)$. Entonces, lo que hicimos fue sustituir x por $D(p)$ en la expresión de $C(x)$:

$$p \overset{D}{\longmapsto} D(p) \overset{C}{\longmapsto} C\Big(D(p)\Big).$$

Nos encontramos entonces con la necesidad de aplicar sucesivamente dos funciones. El estudio de este tipo de operación (llamada composición de funciones) es uno de los objetivos principales de este capítulo, en el que también presentaremos otras operaciones básicas entre funciones como la suma, el producto y el cociente.

También definiremos algunas clases de funciones que son de utilidad en el curso. Asimismo, en este capítulo nos referiremos al impuesto a la renta de las personas físicas (IRPF), que motivará el estudio de funciones definidas por más de una fórmula.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=zJj5V_MGrPk` (Otras funciones parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=Foe--fw12DY` (Otras funciones parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=wFfLTdNwOUI` (Otras funciones parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=AQF2tOwQBZ4&t=20s` (Valor absoluto)

3.1 Concepto de función

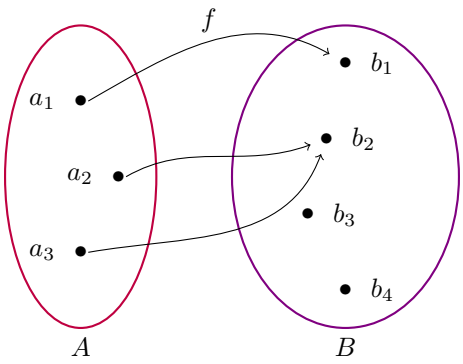
Definición 3.1.1. Definición de función
Sean A y B conjuntos no vacíos y f una correspondencia con conjunto de partida (dominio) A y conjunto de llegada (codominio) B. Se dice que f es una **función** *de A en B si cada elemento de A tiene un único correspondiente en B.*

La notación $f : A \to B$ representa una función f que tiene como dominio el conjunto A y como codominio el conjunto B.

Observación 3.1.1. Imágenes y preimágenes por una función
Sea $f : A \to B$ una función con dominio A y codominio B.

1. A cada elemento x perteneciente al dominio A le queda asociado un único elemento $f(x)$ que pertenece al codominio B. Se dice que $f(x)$ es la imagen (o el correspondiente) de x por la función f.
2. Si la imagen del elemento $a \in A$ por la función f es el elemento $b \in B$ (o sea, si $f(a) = b$), se dice que a es una preimagen de b.
3. Si bien cada elemento del dominio tiene un único correspondiente, puede haber elementos en el codominio que tengan varias preimágenes. También puede suceder que haya elementos en el codominio que no sean imagen de nadie, es decir, que no tienen preimagen.

Ejemplo 3.1.1. El siguiente diagrama representa una función f de dominio $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y codominio $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.



En este caso el elemento b_1 es la imagen por f del elemento a_1. Por su parte, b_2 es la imagen por f del elemento a_2 y también es la imagen del elemento a_3. Es así que b_2 tiene dos preimágenes. Además, podemos observar que de los elementos b_3 y b_4 no tienen preimagen alguna. ∇

Definición 3.1.2. Recorrido de una función
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función de dominio A y codominio B. Se denomina **recorrido** *de f (o conjunto imagen de f) al conjunto*

$$Rec(f) = \{\, y \in B \,/\, \textit{existe algún } x \in A \textit{ tal que } f(x) = y \,\}.$$

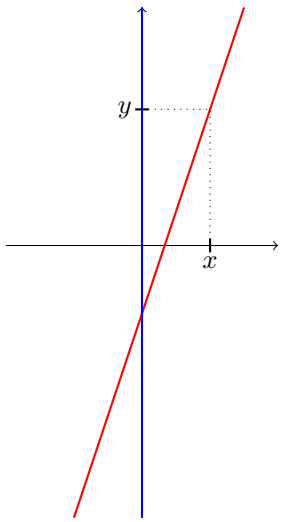
Es decir, el recorrido de f es el conjunto integrado por todos los elementos del codominio que tienen alguna preimagen. El $Rec(f)$ también se indica como $f(A)$.

Ejemplo 3.1.2. En el ejemplo 3.1.1, el recorrido de la función f es $Rec(f) = \{b_1, b_2\}$. ∇

Ejemplo 3.1.3. Queremos encontrar el recorrido de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x - 2$. Como su gráfica es una recta no paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$, parece razonable conjeturar que el recorrido de esta función es todo $\mathbb{R}$. Para justificarlo debemos demostrar que todo número real y tiene preimagen. Sea entonces $y \in \mathbb{R}$. Queremos demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. O sea, dado y, debemos encontrar x tal que $3x - 2 = y$. Tenemos las siguientes equivalencias

$$3x - 2 = y \iff 3x = y + 2 \iff x = \frac{y+2}{3}.$$

La preimagen de y (en este caso hay una sola) es $x = \dfrac{y+2}{3}$. Como esta deducción vale para cualquier número deducimos que $Rec(f) = \mathbb{R}$.



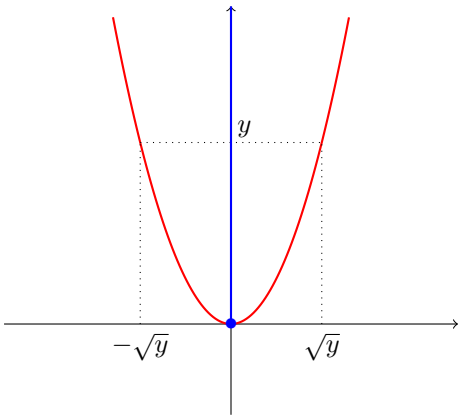
∇

Ejemplo 3.1.4. Queremos encontrar el recorrido de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. La función g eleva al cuadrado cada número del dominio. Como sabemos, el resultado de esta operación siempre es mayor o igual a cero. Es decir, se cumple que

$g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Por ello, es evidente que ningún número real negativo puede pertenecer al $Rec(g)$. Para justificar que $Rec(g) = [0, +\infty)$ debemos demostrar que todo $y \geq 0$ tiene preimagen. Dado $y \geq 0$ tenemos las siguientes equivalencias

$$g(x) = y \iff x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{y}.$$

Resulta entonces que cada número $y > 0$ tiene dos preimágenes, que son $x = \sqrt{y}$ y $x = -\sqrt{y}$, mientras que $y = 0$ tiene una sola preimagen que es $x = 0$. Ha quedado justificado que $Rec(g) = [0, +\infty)$.



∇

Ejercicio 3.1.

A partir de la gráfica, deduce el recorrido de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = mx + n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con $m \neq 0$.

(b) $f(x) = 4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

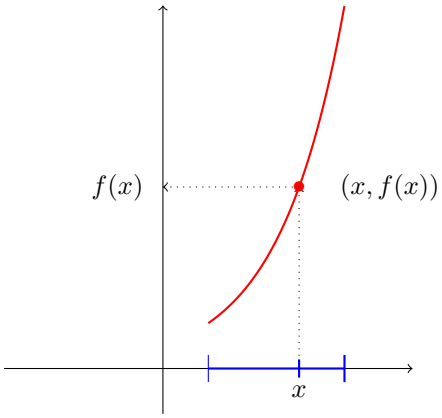
(c) $f(x) = -x^2 + 4x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(d) $f(x) = x^2 - 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

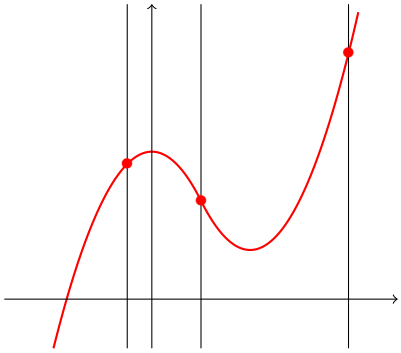
Definición 3.1.3. Gráfica de una función

Sea $f : A \longrightarrow B$, con A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se denomina **gráfica** *de f al conjunto de puntos del plano definido de la siguiente manera:*

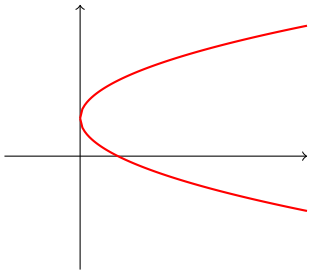
$$G(f) = \{\, (x, f(x)) \;/\; x \in A \,\}.$$



Es importante observar que, como cada x perteneciente al dominio tiene una sola imagen, entonces toda recta paralela al eje $\overrightarrow{Oy}$ interseca a $G(f)$ en un punto a lo sumo.



Por ejemplo, la curva de la siguiente figura no es la gráfica de ninguna función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.



3.2 Operaciones con funciones

Funciones: suma, resta, producto y cociente

Definición 3.2.1. Funciones: suma, resta, producto y cociente
Sean $f : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones con dominios* A_1 *y* A_2 *respectivamente, tales que* $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

1. *La* **función suma** *de* f *y* g *es la función que denotaremos* $f + g$ *y que está definida de la siguiente manera*

$$f + g : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall\, x \in A_1 \cap A_2.$$

2. *La* **función resta** *de* f *y* g *es la función que denotaremos* $f - g$ *y que está definida de la siguiente manera*

$$f - g : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (f - g)(x) = f(x) - g(x), \ \forall\, x \in A_1 \cap A_2.$$

3. *La* **función producto** *de* f *por* g *es la función que denotaremos* $f.g$ *y que está definida de la siguiente manera*

$$f.g : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (f.g)(x) = f(x)\, g(x), \ \forall\, x \in A_1 \cap A_2.$$

4. *La* **función cociente** *de* f *sobre* g *es la función que denotaremos* $\dfrac{f}{g}$ *y que está definida de la siguiente manera*

$$\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall\, x \in D,$$

en donde $D = A_1 \cap A_2 - \{x \in A_2 \,/\, g(x) = 0\}$

Observación 3.2.1. Diferencia entre $f + g$ **y** $f(x) + g(x)$
Debemos tener en cuenta que, si bien se utiliza el mismo símbolo, la expresión $f(x) + g(x)$ indica una suma de números reales, mientras que $f + g$ representa una suma de funciones. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es la imagen del punto x por la función suma $f + g$. Por supuesto que la misma observación vale para las otras operaciones.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = 4x^3$. Entonces se cumple que

- $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (f + g)(x) = x^2 + 4x^3, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $f.g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (f.g)(x) = 4x^5, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R} \ / \ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{4x}, \ \forall\, x \in D = \mathbb{R} - \{0\}.$ ∇

Ejercicio 3.2.

Encuentra el dominio y la fórmula correspondiente a $f+g$, $f.g$ y $\frac{f}{g}$ en los siguientes casos.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^3 - x + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x - 5$.

(b) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x - 1$.

Composición de funciones

Retomemos una situación que hemos visto en el capítulo 2. Supongamos, por ejemplo, que el sueldo de un vendedor de libros depende del número de libros que vende y que está dado por la función $S(x) = 500 + 50x$, donde x es el número de unidades vendidas. Por otro lado, el vendedor sabe que el número de unidades vendidas depende del precio de cada unidad (función de demanda). Analizando el mercado se encuentra que la función de demanda es $D(p) = 1300 - 3p$, donde p indica el precio por unidad. Queremos obtener una nueva función $f(p)$ que exprese el sueldo del vendedor en función del precio de cada unidad. ¿Qué es lo que tenemos que hacer?

$$\text{precio} \overset{D}{\longmapsto} \text{cantidad vendida} \overset{S}{\longmapsto} \text{sueldo}$$

$$p \overset{D}{\longmapsto} D(p) \overset{S}{\longmapsto} S\Big(D(p)\Big)$$

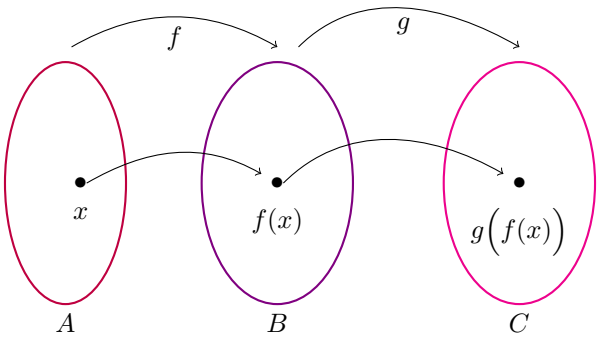
$$p \overset{D}{\longmapsto} 1300 - 3p \overset{S}{\longmapsto} 500 + 50(1300 - 3p)$$

A cada precio le aplicamos la función D y al resultado $D(p)$ le aplicamos la función S obteniendo finalmente $f(p) = S\Big(D(p)\Big)$.

Hemos aplicado de forma sucesiva dos funciones, primero la función de demanda D y luego la función de sueldo S. Se dice que hemos hecho la composición de la función S con la función D. La próxima definición nos permite generalizar esta construcción mediante dos funciones que deben cumplir ciertas hipótesis.

Definición 3.2.2. Composición de funciones
Sean dos funciones $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$. *La* **función compuesta** *de* g *con* f *es la función que indicaremos* $g \circ f$ *y que está definida por*

$$g \circ f : A \longrightarrow C \ / \ (g \circ f)(x) \ = \ g\Big(f(x)\Big), \ \ \forall\, x \in A.$$



$$x \ \overset{f}{\longmapsto} \ f(x) \ \overset{g}{\longmapsto} \ g\Big(f(x)\Big)$$

Ejemplo 3.2.2. Consideremos las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x - 2.$$

Queremos hallar $g \circ f$, o sea, la composición de g con f. Para ello podemos proceder de la siguiente manera

$$x \ \overset{f}{\longmapsto} \ x^2 \ \overset{g}{\longmapsto} \ x^2 - 2,$$

de donde resulta que

$$(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) = x^2 - 2.$$

¿Qué ocurre si hacemos la composición en el orden inverso?

$$x \ \overset{g}{\longmapsto} \ x - 2 \ \overset{f}{\longmapsto} \ (x-2)^2,$$

con lo cual se obtiene

$$(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (f \circ g)(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

En este caso hemos obtenido que $g \circ f \neq f \circ g$. Dicho de otro modo, la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa. ∇

Ejercicio 3.3.

Se consideran las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de las cuales se sabe que $f(0) = 3$, $f(5) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-2) = 8$, $g(3) = 7$, $g(1) = 5$, $g(8) = 0$ y $g(0) = -10$. Halla

(a) $(g \circ f)(0)$,
(b) $(g \circ f)(5)$,
(c) $(g \circ f)(1)$,
(d) $(g \circ f)(-2)$.

Ejercicio 3.4.

Halla $g \circ f$ y $f \circ g$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x^2$, , $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x + 3$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2 + x$.

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = 2x - 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

(d) $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\} \ / \ g(x) = \dfrac{1}{x}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ / \ f(x) = x^2 + 1$.

(e) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 3.5.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple $f(1) = 2$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. (I) $(f \circ g)(1) = 2$.
2. (II) $(g \circ f)(1) = 4$.
3. (III) $(g \circ g)(2) = 16$.

Entonces

1. (I), (II) y (III) son verdaderas.
2. solo (I) y (II) son verdaderas.
3. solo (I) y (III) son verdaderas.
4. solo (II) y (III) son verdaderas.

Actividad con GeoGebra 3.1.

Se consideran las funciones f y g, polinómicas de primer y segundo grado respectivamente, y la función h dada por $h(x) = (g \circ f)(x)$. En el siguiente enlace encontrarás los gráficos de f y de g. El deslizador que está a la izquierda te permite desplazar el punto $A = (x, f(x))$ y el punto $B = (f(x), g(f(x))$, y en la planilla central podrás observar las imágenes por f de algunos valores de x y la imagen por g de $f(x)$.

1. Usando el deslizador completa la siguiente tabla.

x	$f(x)$	$g(f(x))$
2		
	-3	
		8
		8
-4		
	5	

2. ¿Cuáles son las raíces de $h(x)$?
3. Determina la expresión analítica de f.
4. Halla el valor de x para que $h(x) = 48$, sabiendo $g(7) = 48$.
5. Halla la expresión analítica de g y de h.

3.3 Función potencial

Funciones polinómicas

En los dos primeros capítulos de este libro hemos estudiado con cierto grado de detalle las funciones lineales y las cuadráticas, que son casos particulares de funciones polinómicas. Si bien asumiremos que conoces las propiedades básicas de las funciones polinómicas desde los cursos de educación media, recordaremos su definición y realizaremos algunas observaciones que consideramos de utilidad. Para ello, comenzamos recordando qué se entiende por potencia de exponente natural.

Definición 3.3.1. Potenciación de base real y exponente natural
Si $x \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *entonces* x^n *está definido mediante*

$$x^n = \overbrace{x\, x \ldots . x}^{n \text{ veces}}.$$

Si $x \neq 0$, *se define* $x^0 = 1$.

Observación 3.3.1. Propiedades de las potencias de exponente natural
Cualesquiera que sean el número real x y los números naturales m y n diferentes de 0 se cumplen las siguientes propiedades:

- $x^m\ x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $x > 1 \implies x^n > 1$
- $0 < x < 1 \implies x^n < 1$
- $0 < x < y \implies x^n < y^n$

Un monomio es una expresión de la forma $a\ x^k$, donde a es una constante y k un número natural. Al sumar monomios obtenemos los denominados polinomios, cuya definición precisa presentamos a continuación.

Definición 3.3.2. Función polinómica
Una función f se dice **polinómica de grado** n *si su dominio es $\mathbb{R}$ y existen números reales $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, con $a_n \neq 0$, tales que*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.3.1. Algunas funciones polinómicas

- Una función constante, $f(x) = n$, es una función polinómica de grado 0, que tiene como gráfica una recta paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$.
- Una función lineal, $f(x) = mx + n$ con $m \neq 0$, es una función polinómica de grado 1, que tiene como gráfica una recta que no es paralela a ninguno de los dos ejes coordenados.
- Una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, es una función polinómica de grado 2, que tiene como gráfico una parábola de eje paralelo al eje $\overrightarrow{Oy}$.
- La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 9$ es una función polinómica de grado 3. Por ahora no disponemos de elementos para conocer su gráfica. ∇

Entre todos los resultados vinculados con funciones polinómicas destacamos los siguientes.

Teorema 3.3.1. Condición de divisibilidad entre $(x - a)$
Sea f una función polinómica de grado $n \geq 2$. Entonces se cumple que a es raíz de f (es decir, $f(a) = 0$) si, y solo si, existe una función polinómica h de grado $n - 1$ tal que $f(x) = (x - a)h(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.3.2. Teorema de identidad de polinomios
Sean f y g funciones polinómicas dadas por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ \ g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Entonces se cumple que $f(x) = g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, si, y solo si, $n = m$ y además $a_k = b_k$, $\forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

Potenciación con exponentes no naturales

Es posible definir la potenciación a partir de exponentes que no sean necesariamente números naturales y de modo que se sigan cumpliendo las operaciones habituales.

Definición 3.3.3. Potenciación de base real y exponente entero
Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y* $q \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, *entonces* x^q *está definido mediante*

$$x^q = \frac{1}{x^{-q}}$$

.

La definición se basa en que todo número real diferente de 0 tiene inverso.

Ejemplo 3.3.2. Aplicando la definición obtenemos

- $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.
- $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$.
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{9}} = 9$.
- $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = -\dfrac{1}{64}$. ∇

La próxima etapa es definir la potenciación cuando el exponente es un número racional. Tal vez recuerden que $x^{1/2}$ coincide con $\sqrt{x}$. Si $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces la intención es definir $x^{1/n}$ mediante $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Ahora debemos ser más cuidadosos en las consideraciones relativas a la existencia de la expresión anterior. Por ejemplo, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ existe siempre, mientras que $x^{1/2} = \sqrt{x}$ solo está definido para $x \geq 0$.

Definición 3.3.4. Potenciación de base real y exponente racional
Sea m/n *un número racional en donde* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ *y* $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. *Entonces* $x^{m/n}$ *está definido mediante*

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m},$$

en donde

- $x \in \mathbb{R}$ *si* n *es impar y* $m > 0$.
- $x \in \mathbb{R}$ *y* $x \neq 0$ *si* n *es impar y* $m < 0$.
- $x \geq 0$ *si* n *es par y* $m > 0$.
- $x > 0$ *si* n *es par y* $m < 0$.

Para dar esta definición se han tenido en cuenta las propiedades que se mencionan a continuación.

- Si n es impar, entonces todo número real a tiene una única raíz enésima $\sqrt[n]{a}$, que tiene el mismo signo que a.
- Si n es par, entonces todo número real positivo a tiene una única raíz enésima positiva $\sqrt[n]{a}$.

- La raíz enésima del número 0 es 0.

Ejemplo 3.3.3. Aplicando la definición obtenemos

- $125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$.
- $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.
- $(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$.
- $(-27)^{1/2}$ no está definido.
- $0^{1/2} = \sqrt{0} = 0$.
- $0^{-1/2}$ no está definido. ∇

Observación 3.3.2. Una propiedad de la radicación
Sean $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ y $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Si $\sqrt[n]{x}$ está definido, entonces se cumple la igualdad

$$\sqrt[n]{x^m} \ = \ \left(\sqrt[n]{x}\right)^m .$$

Esta propiedad puede ser útil debido a que en algunos casos resulta más sencillo calcular primero $\sqrt[n]{x}$ y luego elevarlo a la m, que calcular $\sqrt[n]{x^m}$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.3.4. Aplicando la definición obtenemos

- $4^{5/2} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$.
- $81^{-3/4} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^{-3} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$.
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}} = \sqrt{9} = 3$. ∇

Finalmente, queda por considerar el caso en que el exponente es un número irracional, o sea, un número real que no se puede expresar como un cociente de números enteros. En esta situación, la definición solo puede hacerse para bases positivas y requiere argumentos más complejos que están relacionados con la propiedad de completitud del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales (ver el anexo del capítulo 7). Sin olvidarnos de que ya sabemos trabajar con potencias en las cuales la base no tiene por qué ser positiva, nos limitaremos a admitir que si $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, es posible definir x^α de modo que este número coincida con los resultados conocidos cuando α es un número natural, entero o racional, y de manera tal que se cumplan las siguientes propiedades, que son válidas cualesquiera que sean $\alpha, \beta > 0$ y cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$.

1. **Propiedades operatorias**

   - $\alpha^0 = 1,\ \ \alpha^1 = \alpha,\ \ 1^x = 1$.
   - $\alpha^x\ \alpha^y = \alpha^{x+y}$.
   - $\dfrac{\alpha^x}{\alpha^y} = \alpha^{x-y}$.
   - $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$.
   - $(\alpha\ \beta)^x = \alpha^x\ \beta^x$.
   - $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x = \dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$.

2. **Propiedades de monotonía**

   - $\alpha^x > 0$.
   - Si $\alpha > 1$ y $x < y$ entonces $\alpha^x < \alpha^y$.

- Si $0 < \alpha < 1$ y $x < y$ entonces $\alpha^x > \alpha^y$.
- Si $0 < \alpha < \beta$ y $x > 0$ entonces $\alpha^x < \beta^x$.

Función potencial

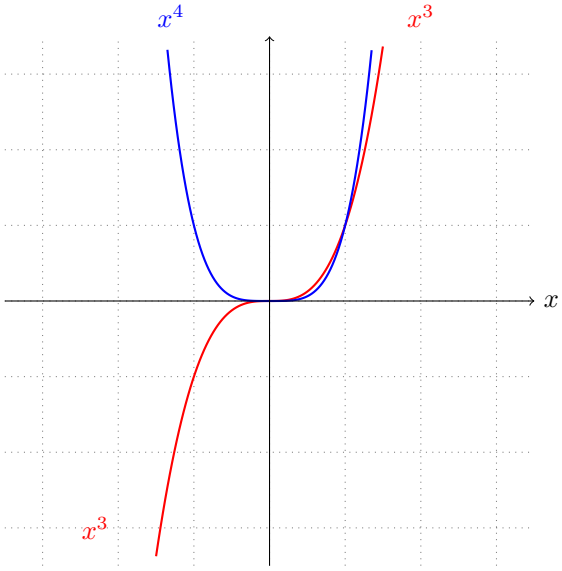
Definición 3.3.5. Función potencial
Una función $f : A \to \mathbb{R}$ *se dice que es una función* **potencial** *si existe un número real fijo* α *de modo que* $f(x) = x^\alpha$, $\forall\, x \in A$.

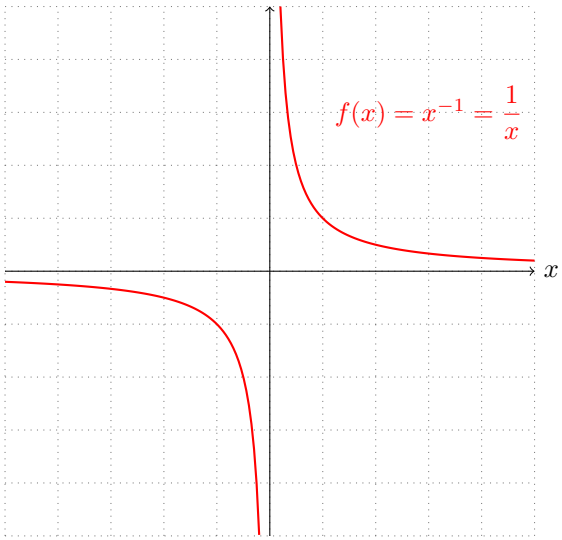
En el caso de las funciones de tipo potencial, consideraremos un dominio A lo más amplio posible. Si tenemos en cuenta las consideraciones realizadas en anteriormente, obtenemos los siguientes casos.

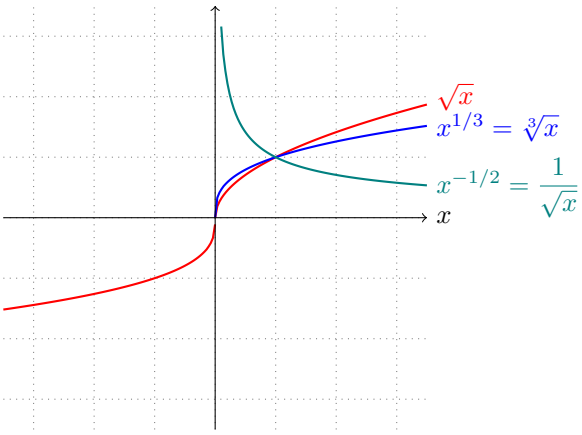
1. Si α es un número natural, entonces $A = \mathbb{R}$.
2. Si α es un número entero no natural, entonces $A = \mathbb{R} - \{0\}$.
3. Sea $\alpha = \dfrac{m}{n}$ un número racional con $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ y $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, entonces
   - Si n es impar y $m > 0$, entonces $A = \mathbb{R}$.
   - Si n es impar y $m < 0$, entonces $A = \mathbb{R} - \{0\}$.
   - Si n es par y $m > 0$, entonces $A = [0, +\infty)$.
   - Si n es par y $m < 0$, entonces $A = (0, +\infty)$.
4. Si α es un número irracional, entonces $A = [0, +\infty)$ si $\alpha > 0$, y $A = (0, +\infty)$ si $\alpha < 0$.

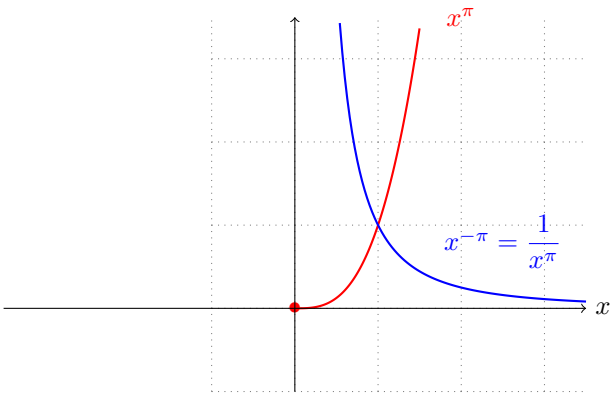
Resulta importante destacar que, cualquiera que sea el exponente α, la función potencial $f(x) = x^\alpha$ está definida por lo menos en el intervalo $(0, +\infty)$. Dicho de otra forma, siempre está definida, por lo menos, para todo $x > 0$.

Presentamos a continuación algunas gráficas de funciones particulares correspondientes a cada uno de los cuatro casos mencionados.


x^4
x^3
x
x^3


$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$
x


$\sqrt{x}$
$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
x

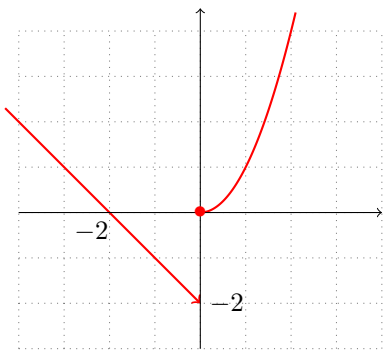

x^{π}
$x^{-\pi} = \frac{1}{x^{\pi}}$
x

3.4 Funciones definidas por más de una fórmula

En la última sección de este capítulo nos referiremos al impuesto a la renta de las personas físicas (IRPF). Este impuesto aplica tasas diferenciadas según distintas franjas asociadas al ingreso recibido. Por eso, la función $f(x)$ que determina el monto de impuesto que se debe pagar por IRPF viene dada por diferentes fórmulas, según el intervalo al que pertenece x, que representa el monto del ingreso nominal de la persona física. Esta aplicación motiva entonces el estudio de funciones definidas por más de una fórmula. Presentamos a continuación un primer ejemplo en el que resolveremos algunas actividades con el propósito de comprender cómo se trabaja con este tipo de funciones.

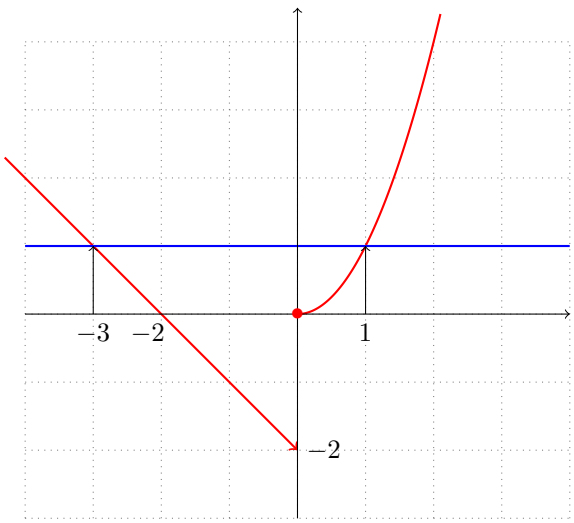
Ejemplo 3.4.1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ -x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Queremos calcular los valores $f(5)$, $f(0)$, $f(-3)$ y $f(f(-4))$. Como la función está definida por dos fórmulas, hay que analizar cuál de ellas debemos usar, según la zona donde se encuentre el valor de x a considerar.
   - $x = 5$ cumple con la condición $x \geq 0$ y, por lo tanto, para calcular $f(5)$ debemos usar la fórmula correspondiente a dicha región, es decir la definida para x≥0. Tenemos entonces que $f(5) = 5^2 = 25$.
   - Razonando de forma análoga tenemos que $f(0) = 0^2 = 0$ (se usó la fórmula definida para x≥0) y que $f(-3) = -(-3) - 2 = 1$ (se utilizó la fórmula definida para x<0).
   - Para calcular $f(f(-4))$ debemos calcular primero $f(-4)$ y al resultado aplicarle f nuevamente. Comenzamos entonces calculando $f(-4) = -(-4) - 2 = 2$ (se usó la fórmula definida para x<0). Luego, $f(f(-4)) = f(2) = (2)^2 = 4$ (se utilizó la la fórmula del tramo x≥0).
2. Queremos graficar la función f. Para $x \geq 0$ la gráfica de f coincide con la de la parábola $y = x^2$, mientras que para $x < 0$ la gráfica de f coincide con la de la recta $y = -x - 2$. La gráfica de f queda de la siguiente manera



3. Queremos resolver la ecuación $f(x) - 1 = 0$. Para ello debemos distinguir si x pertenece a la primera zona ($x \geq 0$) o a la segunda ($x < 0$).
   - $x \geq 0$: Nos queda la ecuación $x^2 = 1$, que en principio tiene dos soluciones, $x = \pm 1$. Solo $x = 1$ está en la zona $x \geq 0$, por lo que esta es la solución válida.
   - $x < 0$: Nos queda la ecuación $-x - 2 = 1$. Al despejar x, obtenemos $x = -3$. Como este valor está en la zona $x < 0$, también es una solución válida.

   Resumiendo, las raíces de la ecuación $f(x) = 1$ son -3 y 1.
   Podemos dar una interpretación gráfica al resultado obtenido. En primer lugar observamos que la ecuación $f(x) - 1 = 0$ es equivalente a $f(x) = 1$. Las soluciones de esta última ecuación son las abscisas de los puntos pertenecientes a la intersección de la gráfica de f con la gráfica de la función constante $y = 1$.



∇

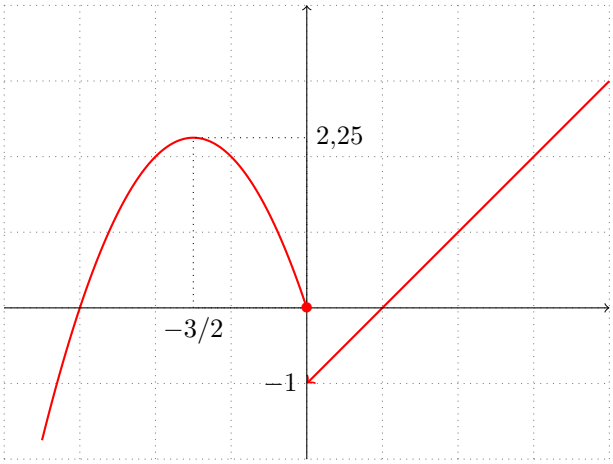
Ejemplo 3.4.2. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } x \leq 0, \\ x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Queremos hallar $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ reales sabiendo que -3 es raíz de f y que $f(2) = 1$. Observamos que la primera condición que debe cumplir se aplica a la función en los puntos del dominio negativos y la segunda condición en los puntos del dominio positivos. Entonces, podemos aplicar las siguientes dos deducciones:

-3 es raíz de $f \Leftrightarrow f(-3) = 0 \Leftrightarrow -(-3)^2 + a(-3) = 0 \Leftrightarrow -9 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

$f(2) = 1 \Leftrightarrow 2 + b = 1 \Leftrightarrow b = -1$.

Concluimos que la función f queda $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x & \text{si } x \leq 0, \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Al graficar la función, obtenemos



∇

Ejemplo 3.4.3. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 - 4x + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$

A partir de esta función, se propone:

(a) Encontrar a y b reales sabiendo que 2 y $-\sqrt{2}$ son raíces de f. Se continúa trabajando con los valores de a y b hallados.

(b) Graficar la función f.

(c) Resolver la ecuación $f(x) - 4 = 0$.

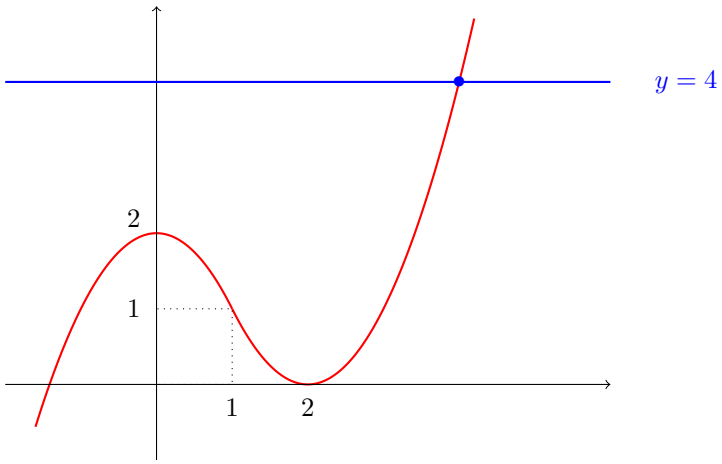
(a) Para encontrar a y b desarrollamos ambos razonamientos:

- 2 es raíz de $f \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 8 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$. Observemos que se usó la fórmula correspondiente al tramo $x > 1$, debido a que $2 > 1$.
- $-\sqrt{2}$ es raíz de $f \Leftrightarrow f(-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow -\left(-\sqrt{2}\right)^2 + a = 0 \Leftrightarrow -2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 2$. En este caso, se usó la fórmula correspondiente al tramo $x \leq 1$.

(b) Con los valores de a y b hallados en la parte anterior la función f queda

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Su gráfica (en rojo) es la siguiente



(c) La ecuación $f(x) - 4 = 0$ es equivalente a $f(x) = 4$. Las soluciones de esta última ecuación son los valores de x correspondientes a la intersección de la gráfica de f con la gráfica de la función constante $y = 4$ (en rojo). De la gráfica observamos que hay un solo punto de corte que se da para un valor de x mayor que 1. Para encontrarlo resolvemos la ecuación con la expresión correspondiente a $x > 1$.

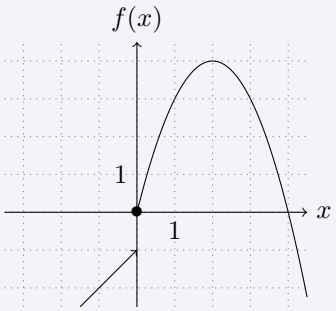
$$x^2 - 4x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad o \quad x = 4.$$

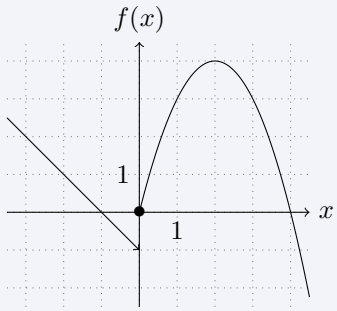
La única raíz de la ecuación planteada es $x = 4$. ∇

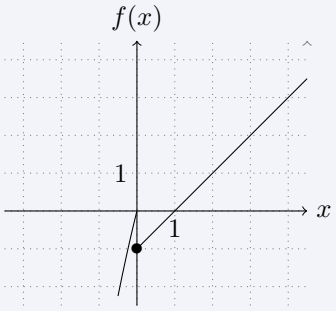
Ejercicio 3.6.

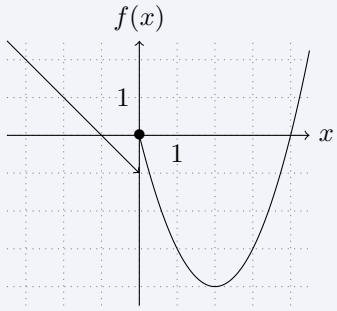
Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Indica cuál de las siguientes es la gráfica de f.









Ejercicio 3.7.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x > 0, \\ 2x + 3 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

(a) Grafícala.

(b) Calcula $f(-2)$, $f(0)$ y $f(5)$.

(c) Calcula $f\Big(f(5)\Big)$.

(d) Resuelve la ecuación $f(x) = 1$ e interpreta gráficamente.

Ejercicio 3.8.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1, \\ x + 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

(a) Grafícala.

(b) Calcula $f(-1)$, $f(1)$ y $f(2)$.

Ejercicio 3.9.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 1, \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

(a) Grafícala.

(b) Resuelve la ecuación $f(x) = 2$ e interpreta gráficamente.

Ejercicio 3.10.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 0, \\ -2x + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(a) Encuentra los reales a y b sabiendo que $f(-1) = -1$ y $f(2) = 0$.

(b) Resuelve la ecuación $f(x) = 2$ e interpreta gráficamente.

Ejercicio 3.11.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 0, \\ -2x + b & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(a) Encuentra los reales a y b sabiendo que -2 es raíz de la función y que $f(3) = -5$.

(b) Grafícala.

(c) Resuelve la ecuación $f(x) = -1$ e interpreta gráficamente.

(d) Calcula el valor de $f\Big(f(2)\Big)$.

Ejercicio 3.12.

Una agencia de viajes ofrece paquetes turísticos para grupos de adolescentes. El costo del viaje por persona depende de la cantidad de integrantes del grupo. Para grupos de menos de 6 integrantes, el costo es de 200 dólares. Si el grupo tiene entre 6 y 15 integrantes, tienen un descuento del 10 % y si son más de 15 integrantes, el descuento es del 15 %, siempre sobre el primer precio.

(a) Halla el precio por persona en cada una de las tres categorías.

(b) Halla la función de costo total de un grupo, en función de su número de integrantes. Grafícala.

Ejercicio 3.13.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0, \\ x + a + b & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ -x^2 + ax & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

(a) Halla los reales a y b sabiendo que $f(1) = 3$ y que $f(2) = 4$.

(b) Calcula las raíces de f.

(c) Grafica la función f.

Ejercicio 3.14.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x > 2, \\ 6x + a & \text{si } x \leq 2. \end{cases}$

Una sola de las siguientes afirmaciones es verdadera.

1. Si $a = 6$, entonces 1 es raíz de f y además, para ese valor de a, la función f tiene exactamente una raíz en total.
2. Si $a = -6$, entonces 1 es raíz de f y además, para ese valor de a, la función f tiene exactamente dos raíces distintas en total.
3. Si $a = 6$, entonces 1 es raíz de f y además, para ese valor de a, la función f tiene exactamente dos raíces distintas en total.
4. Si $a = -6$, entonces 1 es raíz de f y además, para ese valor de a, la función f tiene exactamente una raíz en total.
5. Si $a = -6$, entonces 1 es raíz de f y además, para ese valor de a, la función f tiene exactamente una raíz que además es negativa.

Actividad con GeoGebra 3.2.

Consideremos las funciones g, h e i definidas en todo $\mathbb{R}$ y sea la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a, \\ h(x) & \text{si } a \leq x < b, \\ i(x) & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

donde $-5 \leq a \leq 2$ y $2 \leq b \leq 5$.

Puedes acceder a la gráfica de f para diferentes valores de a y b en este enlace. Cuentas además con un deslizador c para graficar la recta $y = c$.

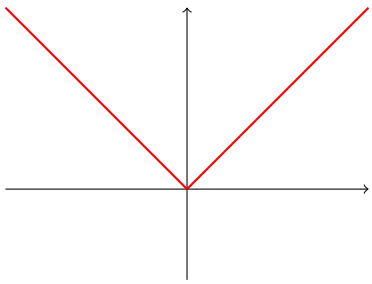
1. Sabiendo que h es una función cuadrática, determina las fórmulas de g, h e i.
2. Utilizando los deslizadores, determina un valor de a y uno de b para que
   a) f tenga dos raíces.
   b) f tenga una única raíz y no corte a la recta $y = 2$.
   c) f tenga signo negativo en todo su dominio.
   d) la ecuación $f(x) = -6$ tenga exactamente dos soluciones.
   e) la ecuación $f(x) = -6$ tenga exactamente tres soluciones.
   f) la ecuación $f(x) = -5$ tenga infinitas soluciones.
   g) la ecuación $f(x) = -5$ tenga una solución mayor que cero y menor o igual a 2.
   h) la ecuación $f(x) = -5$ tenga una solución menor que cero y otra solución menor o igual a 2.
   i) la ecuación $f(x) = 4$ tenga una solución.
3. ¿Existe algún par de valores que hagan que la ecuación $f(x) = 5$ tenga al menos una solución?
4. Para los valores de a y b hallados en el ítem 1, verifica analíticamente.

3.5 Función valor absoluto

Es posible establecer que el valor absoluto de un número real es su magnitud más allá del signo. Este concepto presenta una gran utilidad en diferentes ciencias (incluida la economía) porque está asociado a nociones geométricas mediante la longitud y la distancia. Matemáticamente, el valor absoluto de un número real x se simboliza $|x|$ y está definido de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es decir, $|x|$ coincide con x si $x \geq 0$ y coincide con el opuesto de x si $x < 0$.
De manera sencilla, es posible establecer la función valor absoluto mediante la extensión de la definición (puntual) anterior. La función valor absoluto es la función
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = |x|$, y su gráfica es la siguiente



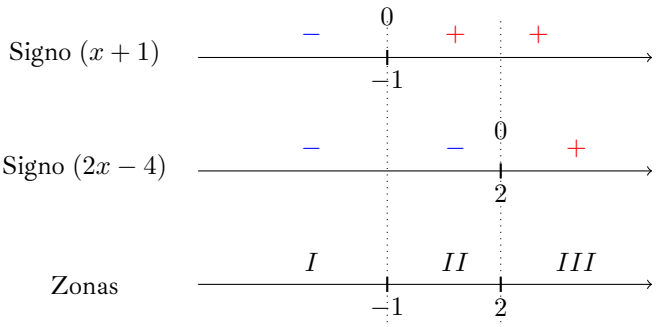
Observación 3.5.1. Algunas propiedades del valor absoluto
En algunas ocasiones utilizaremos algunas de las siguientes propiedades del valor absoluto.

1. $|x| \geq 0, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. $|a.b| = |a|.|b|, \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$.
4. $|a + b| \leq |a| + |b|, \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
5. Siendo $r > 0$, $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.
6. Siendo $r > 0$, $|x| > r \iff x > r$ o $x < -r$.

Ejemplo 3.5.1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = |x + 1| - |2x - 4|$.
Queremos expresar $f(x)$ sin utilizar valores absolutos. Para ello aplicamos la definición de valor absoluto.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0, \\ -x-1 & \text{si } x+1 < 0, \end{cases} \quad \text{o sea} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1, \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } 2x-4 \geq 0, \\ -2x+4 & \text{si } 2x-4 < 0, \end{cases} \quad \text{o sea} \quad |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \geq 2, \\ -2x+4 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$



Para expresar $f(x)$ sin utilizar valores absolutos trabajamos en cada una de las tres zonas que quedaron indicadas en el esquema.

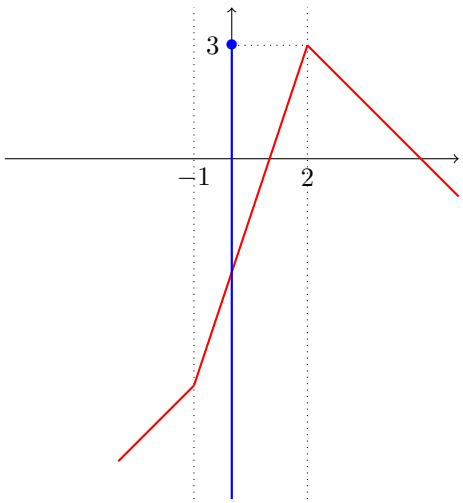
Zona I (corresponde a $x < -1$): $f(x) = |x+1| - |2x-4| = -x-1-(-2x+4) = x-5$.

Zona II (corresponde a $-1 \leq x < 2$): $f(x) = |x+1|-|2x-4| = x+1-(-2x+4) = 3x-3$.

Zona III (corresponde a $x \geq 2$): $f(x) = |x+1| - |2x-4| = x+1-(2x-4) = -x+5$.
Resulta entonces que

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si } x < -1, \\ 3x-3 & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ -x+5 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

La gráfica de la función queda de la siguiente manera



Observemos que el recorrido de f es el intervalo $(-\infty, 3]$. ∇

Ejercicio 3.15.

Dada la función $f(x) = |2x - 6| - |x|$.

(a) Exprésala mediante fórmulas que no contengan valor absoluto.

(b) Grafícala.

(c) Halla el recorrido de f.

(d) Resuelve la ecuación $f(x) = 8$.

(e) Verifica los resultados obtenidos utilizando GeoGebra.

Ejercicio 3.16.

Utilizando GeoGebra grafica la función $g(x) = |x - a|$ para distintos valores de a. Lo mismo para $h(x) = -|x - a|$ y para $j(x) = |x| + a$.

3.6 Impuesto a la renta de las personas físicas (IRPF)

Es posible clasificar los impuestos desde diferentes perspectivas. Una de estas clasificaciones se basa en la relación entre tasa y base, que da lugar a tres tipos de impuestos: proporcionales, progresivos y regresivos. El impuesto a la renta de las personas físicas (IRPF) es un impuesto progresivo, debido a que, a mayor base —es decir, mayor salario nominal—, mayor será la tasa aplicable. Para describir su funcionamiento, se toma en cuenta el ingreso total nominal mensual, expresado en pesos, de una persona, y se calcula el monto que se le descontará por IRPF de acuerdo con los criterios que se explican a continuación.[1]

Si el ingreso es menor o igual a $ 34 090 (mínimo no imponible) no se paga impuesto. Si es mayor que ese monto, el impuesto se calcula por franjas, de la siguiente manera:

- la parte del ingreso comprendida entre $ 34 090 y $ 48 700 paga un 10 %,
- la parte comprendida entre $ 48 700 y $ 73 050 paga un 15 %,
- la parte comprendida entre $ 73 050 y $ 146 100 paga un 24 %,
- la parte comprendida entre $ 146 100 y $ 243 500 paga un 25 %,
- la parte comprendida entre $ 243 500 y $ 365 250 paga un 27 %,
- la parte comprendida entre $ 365 250 y $ 560 050 paga un 31 %,
- la parte que supera los $ 560 050 paga un 36 %.

Con el fin de comprender mejor el mecanismo de aplicación del impuesto, analicemos tres casos por separado.

- **¿Qué pasa si un persona cobra de salario nominal $ 34 190 pesos?** Los primeros $ 34 090, correspondientes al mínimo no imponible, no pagan impuesto. En este caso, la parte que supera el mínimo no imponible es la diferencia entre $ 34 190 y $ 34 090, es decir, solo $ 100. Esos $ 100 pagan un 10 % de IRPF. Por lo tanto, el impuesto total para una persona cuyo ingreso sea de $ 34 190 es de $ 10.

- **¿Y si la persona cobra $ 48 700 nominales?** Los primeros $ 34 090 no pagan impuesto. En este caso, la parte comprendida entre $ 34 090 y $ 48 700 es la diferencia entre ambos valores, es decir, $ 14 610. Esos $ 14 610 pagan un 10 % de IRPF, es decir $ 1461.

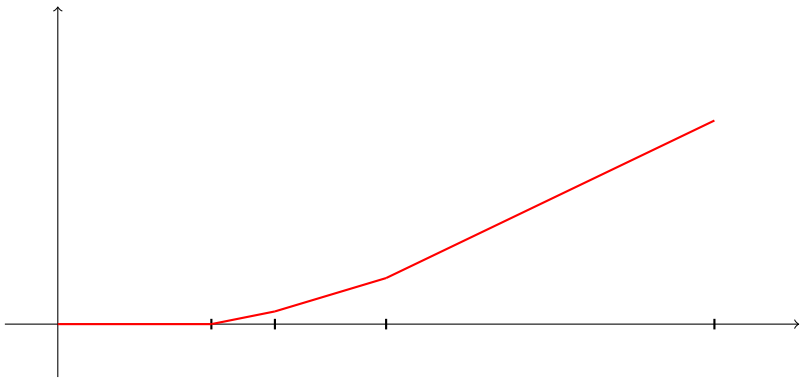
- **¿Y cuánto paga de IRPF si el ingreso total nominal mensual es de $ 58 700?** Los primeros $ 34 090 no pagan impuesto. La parte comprendida entre $ 34 090 y $ 48 700 paga $ 1461. Finalmente, la parte comprendida entre $ 48 700 y $ 58 700 (que equivale a $ 10 000) paga un 15 %, es decir, $ 1500. Por lo tanto, el IRPF correspondiente es de $ 1461 + $ 1500 = $ 2961.

[1] Los porcentajes aquí indicados son los vigentes al año 2021. En realidad el impuesto es anual, pero no entraremos en más detalles.

Después de analizar estos casos particulares, y mediante un razonamiento análogo, podemos generalizar la fórmula matemática del impuesto. Sea x el monto del ingreso nominal mensual y $f(x)$ el monto de impuesto que se debe pagar por IRPF. Se tiene que $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ queda definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 34\,090, \\ 0,1\,(x - 34\,090) & \text{si } 34\,090 < x \leq 48\,700, \\ 1461 \ + \ 0,15\,(x - 48\,700) & \text{si } 48\,700 < x \leq 73\,050, \\ 5113,5 \ + \ 0,24\,(x - 73\,050) & \text{si } 73\,050 < x \leq 146\,100, \\ \text{etc.} & \text{etc.}, \\ \text{etc.} & \text{etc.}, \\ \text{etc.} & \text{etc.}, \\ \text{etc.} & \text{etc.}. \end{cases}$$

La aclaración importante es que no estamos en presencia de varias funciones, sino de una única función f. Simplemente se han tenido que utilizar distintas expresiones para $f(x)$ dependiendo de dónde se encuentra la x, es decir, en qué parte del dominio de la función se encuentra el sueldo nominal. Presentamos a continuación los primeros cuatro tramos de la gráfica de f (no se tomó la misma escala en ambos ejes).



3.7 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 3.17.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x > 2, \\ mx + b & \text{si } x \leq 2. \end{cases}$
Se sabe que 3 y 2 son las raíces de la función f. Entonces

1. $b = -6$ y $m = 3$.
2. $b = -4$ y $m = \dfrac{4}{3}$.
3. $b = -6$ y m cualquiera.
4. $b = -4$ y $m = 3$.

Ejercicio 3.18.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{si } x \leq -1, \\ 1 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > -1. \end{cases}$
Entonces la ecuación $f(x) = 1$ tiene exactamente

1. 1 solución.
2. 2 soluciones.
3. 3 soluciones.
4. 4 soluciones.
5. No tiene solución.

Ejercicio 3.19.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 0, \\ x + a & \text{si } x > 0. \end{cases}$
Se sabe que $f(1) = -2$ y que -4 es raíz de f. Entonces

1. $a = -3$ y $b = -4$.
2. $a = -3$ y $b = 2$.
3. $a = 3$ y $b = 2$.
4. $a = 3$ y $b = 4$.
5. $a = -3$ y $b = 4$.

Ejercicio 3.20.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 0, \\ x + a & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
Una sola de las siguientes afirmaciones es verdadera.

1. Para todo valor de a la función f tiene exactamente 2 raíces distintas.
2. Si $a > 0$ entonces f tiene exactamente una raíz y si $a \leq 0$ entonces f tiene exactamente dos raíces distintas.
3. Si $a \geq 0$ entonces f tiene exactamente una raíz y si $a < 0$ entonces f tiene exactamente dos raíces distintas.
4. Si $a \geq 0$ entonces f tiene exactamente dos raíces distintas y si $a < 0$ entonces f tiene exactamente tres raíces distintas.
5. Si $a > 0$ entonces f tiene exactamente dos raíces distintas y si $a \leq 0$ entonces f tiene exactamente tres raíces distintas.

Ejercicio 3.21.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2, \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $(f \circ f)(-3) = 15$, (II) $(f \circ f)(3) = 9$. Entonces

1. solo (I) es verdadera.
2. solo (II) es verdadera.
3. ambas son verdaderas.
4. ambas son falsas.

Capítulo 4

Funciones exponencial y logarítmica

Durante el desarrollo de la pandemia provocada por el coronavirus que causa la covid 19 se escuchó reiteradamente en la prensa que, durante ciertos períodos, la tasa de contagios tuvo un crecimiento exponencial. No es posible modelar ese tipo de crecimiento mediante las funciones con las que trabajamos en los capítulos anteriores; por eso, el estudio de la función exponencial es, precisamente, uno de los objetivos de este capítulo.

Además del modelado de epidemias, la función exponencial resulta adecuada para estudiar otros fenómenos, como la evolución temporal de un capital colocado a determinada tasa de interés, la desintegración radiactiva y la evolución de poblaciones. Estas son algunas de las aplicaciones que veremos en esta ocasión.

Para finalizar, también estudiaremos la función logarítmica, muy relacionada con la función exponencial, que se utiliza en varios modelos clásicos de matemática, ciencias naturales y, por supuesto, ciencias sociales.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=h8--Erb8jLc` (Exponencial y logarítmica parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=cnF9sYFhiJI` (Exponencial y logarítmica parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=YLMTWOH5u98` (Exponencial y logarítmica parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=jftmCR5QVGE` (Exponencial y logarítmica parte 4)

4.1 Interés compuesto

Consideremos la evolución temporal de un capital de dinero que genera intereses a partir de un depósito a plazo fijo en un banco. Designemos con C el capital inicial (en pesos uruguayos, por ejemplo), y supongamos que se capitaliza anualmente según una tasa anual fija r. Al final de cada período de pago, el interés generado se calculará sobre la base del capital inicial y los intereses acumulados en los períodos previos (interés compuesto). En el instante inicial el saldo en cuenta (denotado como s_0) es exactamente el capital inicial de la inversión:

$$s_0 \;=\; C.$$

Al finalizar el primer año, el saldo en cuenta se obtiene sumando el capital inicial y los intereses generados, es decir:

$$s_1 = C + rC = C(1+r),$$

donde el subíndice 1 indica que ha transcurrido el primer período (el primer año). El saldo en cuenta s_2 al finalizar el segundo año se obtiene al sumar el capital disponible en la cuenta al término del primer año y los intereses generados durante el nuevo período, es decir:

$$s_2 = s_1 + rs_1 = s_1\,(1+r) = C\,(1+r)^2.$$

Mediante un razonamiento análogo, es posible continuar calculando el monto disponible al finalizar cada período:

$$s_3 = s_2 + rs_2 = s_2\,(1+r) = C\,(1+r)^3,$$

$$s_4 = s_3 + rs_3 = s_3\,(1+r) = C\,(1+r)^4.$$

Por lo tanto, de manera general, al finalizar el enésimo año, el saldo será

$$\boxed{s_n \;=\; C\,(1+r)^n}$$

Ejemplo 4.1.1. Supongamos que la inversión inicial es de $\$\,C = 100\,000$ y la tasa anual del 8 %. Si calculamos los saldos en cuenta al cabo de los años 1, 2, 10, 20, 30 y 40 obtenemos los siguientes valores (todo expresado en pesos).

- $s_1 = 100\,000(1,08)^1 = 108\,000.$
- $s_2 = 100\,000(1,08)^2 = 116\,640.$
- $s_{10} = 100\,000(1,08)^{10} \approx 215\,892.$
- $s_{20} = 100\,000(1,08)^{20} \approx 466\,096.$
- $s_{30} = 100\,000(1,08)^{30} \approx 1\,006\,265.$
- $s_{40} \;=\; 100\,000(1,08)^{40} \;\approx\; 2\,172\,452.$

∇

Al analizar la expresión $s_n = C(1+r)^n$ observamos que estamos ante una fórmula en la que aparece una potencia, con la particularidad de que la base está fija y el exponente es variable. Este tipo de expresiones se denominan funciones exponenciales. Si bien en el caso del interés compuesto la variable solo toma valores naturales, conviene estudiarlas cuando el exponente puede tomar otros valores reales.

4.2 Función exponencial

Función exponencial de base b

Si b es un número positivo y diferente de 1, la función exponencial de base b es la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = b^x.$$

Observemos que, independientemente de b, se cumple que

- $f(0) = b^0 = 1$.
- $f(1) = b^1 = b$.
- $f(x) = b^x > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Actividad con GeoGebra 4.1.

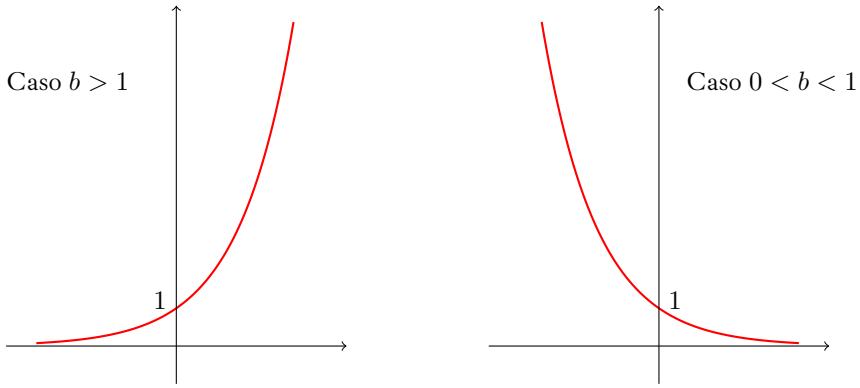
Accediendo a este enlace puedes encontrar un deslizador $b > 0$ que te permitirá variar la base de una función exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = b^x$. Observa el comportamiento de la gráfica de f según $b > 1$ y $0 < b < 1$. ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Como resultado de la actividad previa, habrás observado que el comportamiento de la función exponencial es diferente según la base sea mayor que 1 o menor que 1. Eso se debe a la propiedad de monotonía de la potencia.

Observemos que, por ejemplo, se cumple la desigualdad $2^3 = 8 > 4 = 2^2$, mientras que por otro lado se cumple la desigualdad $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Estas propiedades de monotonía de la potencia se expresan en los siguientes atributos de la función exponencial.

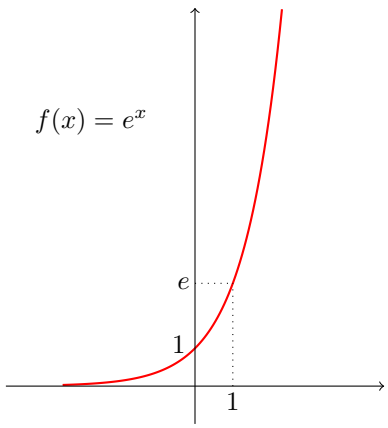
- Si $b > 1$, entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- Si $0 < b < 1$, entonces f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.
- En todos los casos el recorrido de f es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.



Función exponencial de base e

El número e es un número irracional que fue bautizado de esa manera en homenaje a Leonhard Euler (15 de abril de 1707-18 de septiembre de 1783), uno de los matemáticos más importantes y prolíficos de todos los tiempos. El valor más aproximado del número e expresado mediante doce cifras decimales es $2,718281828459$. En la sección 4.4 veremos cómo el número e aparece de manera natural en el problema del interés compuesto con capitalización continua. Además, a medida que avancemos en el curso, iremos reconociendo otras de sus particularidades que son de gran ayuda en la modelación de varios problemas económicos. La función exponencial de base e es entonces la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = e^x.$$



Tenemos las mismas propiedades que en el caso general con base mayor a 1, por lo cual se cumple

- $f(0) = e^0 = 1$.
- $f(1) = e^1 = e$.
- $f(x) = e^x > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) > 1 \iff x > 0$.
- f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- el recorrido de f es $(0, +\infty)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Aprovechamos para repasar aquí otras propiedades de los exponentes. Están escritas en base e, pero valen para cualquier base positiva y para cualesquiera que sean los reales x e y.

- $e^x\ e^y = e^{x+y}$.
- $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- $(e^x)^y = e^{x\,y}$.

Las funciones e^{kx}

Como veremos en la sección **4.4**, en varias aplicaciones necesitaremos funciones exponenciales que dependen de un parámetro $k \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ / \ \ f_k(x) = e^{k\,x}.$$

donde k es una constante diferente de 0. Observemos que si $k > 0$, entonces $e^k > 1$ y, por lo tanto, la función $e^{k\,x} = \left(e^k\right)^x$ es una función exponencial de base mayor que 1. Por otra parte, si $k < 0$, entonces $e^k < 1$, de donde la función $e^{k\,x} = \left(e^k\right)^x$ es una función exponencial de base menor que 1.

Ejercicio 4.1.

Utilizando GeoGebra grafica las funciones

$$f_k(x) = e^{k\,x}$$

para $k = \dfrac{1}{2},\ 1,\ 2, \dfrac{-1}{2},\ -1$ y -2.
¿Qué conclusiones se pueden obtener?

4.3 Función logarítmica

Logaritmo de un número

En el ejemplo 4.1.1 sobre interés compuesto habíamos considerado un capital inicial de $C = \$\,100\,000$ y una tasa anual del 8 %. Esto da lugar a que el saldo al cabo de n años se obtiene mediante la expresión $s_n = 100\,000(1,08)^n$. Si conocemos el valor de n, mediante esta fórmula podemos calcular el valor del saldo s_n. Ahora bien, para un inversionista lo más relevante es conocer el tiempo que se debe esperar para que la inversión alcance un monto determinado. Es decir, preguntarse cuántos años debe esperar para alcanzar ese monto.
Por ejemplo, ¿cuántos años debemos dejar el capital depositado para obtener un saldo que iguale o supere por primera vez $\$\,1\,000\,000$? Queremos hallar entonces el menor valor del natural n para el cual

$$100\,000(1,08)^n \;\geq\; 1\,000\,000.$$

Como la exponencial es estrictamente creciente, alcanza con hallar el valor del número real x que verifique la igualdad

$$100\,000(1,08)^x \;=\; 1\,000\,000.$$

y luego tomar el natural n más cercano a x que cumpla $n \geq x$. Al pasar dividiendo el número 100 000 obtenemos

$$100\,000(1,08)^x \;=\; 1\,000\,000 \iff (1,08)^x = 10.$$

Observemos que la incógnita en la ecuación es el exponente x:

$$(1,08)^{\boxed{x}} = 10.$$

por lo cual debemos hallar el exponente al que hay que elevar el número $1,08$ para obtener el número 10. Esta es precisamente la noción del concepto de logaritmo de un número. En este caso en particular, diremos que x es el logaritmo en base $1,08$ del número 10.

Definición 4.3.1. Logaritmo de un número en una base dada
Sean b un número positivo y diferente de 1 y d un número positivo. El **logaritmo** *de d en base b es el número c que cumple $b^c = d$.*

En otras palabras, el logaritmo de d en base b es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener como resultado el número d. Este logaritmo se simboliza $\log_b(d)$. La definición se puede expresar en símbolos de la siguiente manera

$$\boxed{c} = log_b(d) \iff b^{\boxed{c}} = d.$$

Veremos una serie de ejemplos que nos facilitarán entender esta definición.

Ejemplo 4.3.1. Queremos calcular el $\log_2(8)$. Para ello debemos encontrar el exponente al que hay que elevar el número 2 para obtener el valor 8. Como $2^{3} = 8$, resulta que $\log_2(8) = 3$. ∇

Ejemplo 4.3.2. Queremos calcular el $\log_{10}(100)$. Tenemos que encontrar el exponente al que hay que elevar el número 10 para obtener 100. Como $10^{2} = 100$, resulta que $\log_{10}(100) = 2$. ∇

Ejemplo 4.3.3. Ahora queremos calcular el $\log_5(1/25)$. Tenemos que encontrar el exponente al que hay que elevar el número 5 para obtener $1/25$.

$$5^2 = 25 \implies 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}]Como$$

$5^{-2} = 1/25$, resulta que $\log_5(1/25) = -2$. ∇

Ejemplo 4.3.4. Queremos calcular el $\log_5(1)$. Tenemos que encontrar el exponente al que hay que elevar el número 5 para obtener 1. Como $5^0 = 1$ resulta que $\log_5(1) = 0$. Está claro que aquí el 5 no jugó ningún papel particular ya que $b^0 = 1$ para cualquier número positivo b. Resulta entonces que $\log_b(1) = 0$ para cualquier base $b > 0$. ∇

Ejemplo 4.3.5. Queremos calcular el $\log_{17}(17)$. Tenemos que encontrar el exponente al que hay que elevar el número 17 para obtener 17. Como $17^1 = 17$ resulta que $\log_{17}(17) = 1$. Está claro que aquí el 17 no jugó ningún papel particular ya que $b^1 = b$ para cualquier número positivo b. Resulta entonces que $\log_b(b) = 1$ para cualquier base $b > 0$. ∇

Ejercicio 4.2.

Calcula $\log_2(4)$, $\log_2(32)$, $\log_3(9)$, $\log_3(81)$, $\log_5(125)$, $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$, $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$, $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$, $\log_{1/10}(10\,000)$.

Ejercicio 4.3.

El valor de $\log_2(8) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^4$ es

1. 20.
2. 12.
3. 8.
4. 18.

Función logarítmica de base b

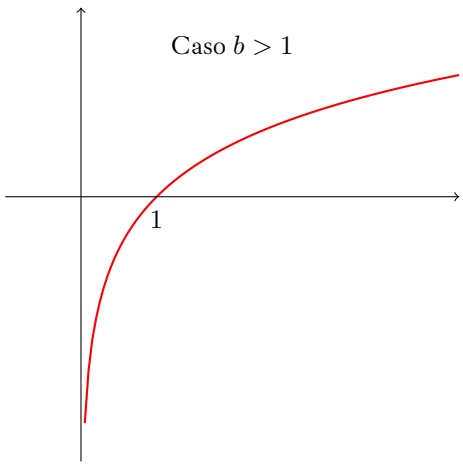
Si b es un número positivo y diferente de 1, la función logarítmica de base b es la función

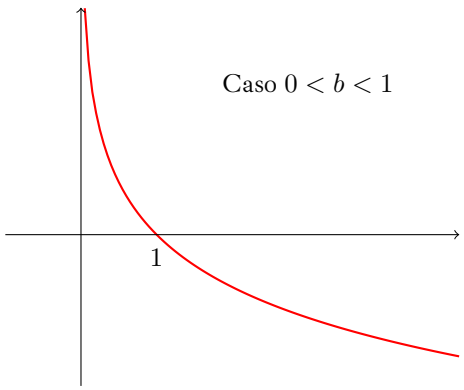
$$g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g(x) = \log_b(x).$$

Observemos que, independientemente de b, se cumple que

- $g(1) = \log_b(1) = 0$.
- $g(b) = \log_b(b) = 1$.
- el dominio son solo los reales positivos, ya que si un número positivo se eleva a un exponente cualquiera el resultado da siempre positivo.

Al igual que en el caso de la función exponencial, el comportamiento de la función logarítmica es diferente según la base sea mayor que 1 o menor que 1. Las siguientes gráficas muestran esa diferencia.





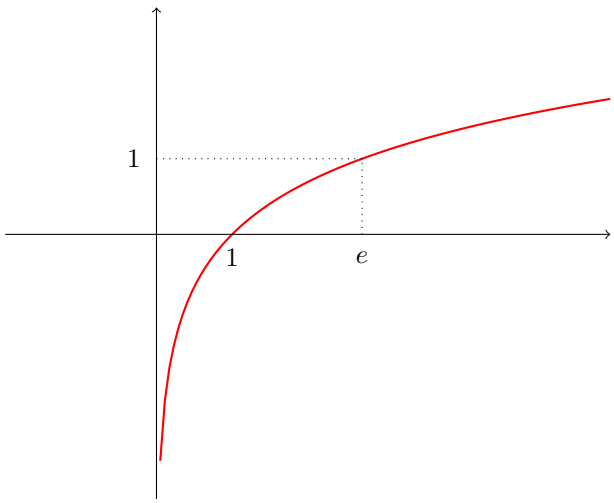
En particular, es importante observar que

- si $b > 1$, entonces la función g es estrictamente creciente en su dominio $(0, +\infty)$.
- si $0 < b < 1$, entonces la función g es estrictamente decreciente en su dominio $(0, +\infty)$.
- en todos los casos el recorrido de la función es todo $\mathbb{R}$.

Función logarítmica de base e

Una función esencial entre todas las funciones logarítmicas se obtiene cuando la base es el número de Euler e. El $\log_e(x)$ se simboliza $L(x)$ o $ln(x)$ (como se ve en las calculadoras). La función logarítmica de base e es la función

$$g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g(x) = L(x).$$



Como $e > 1$, esta función tiene las mismas propiedades que las funciones logarítmicas de base mayor que 1. Es posible resumirlas de la siguiente manera:

- $g(1) = L(1) = 0$.
- $g(e) = L(e) = 1$.
- $L(x) > 0, \ \forall \ x > 1$ y $L(x) < 0$ si $0 < x < 1$.
- g es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$
- el recorrido de g es todo $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} L(x) = -\infty$.

También podemos agregar otras propiedades que cumple el logaritmo de un número, que resultan de gran utilidad al momento de la operatoria. En el próximo teorema las presentamos escritas en base e, pero valen para cualquier otra base positiva y diferente de 1.

Teorema 4.3.1. Propiedades operatorias del logaritmo
Cualesquiera que sean los reales positivos x, y y el real z, se cumplen las siguientes igualdades.

1. $L(x\,y) = L(x) + L(y)$.
2. $L\left(\dfrac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.
3. $L\left(\dfrac{1}{x}\right) = -L(x)$.
4. $L(x^z) = zL(x)$.

DEMOSTRACIÓN.
Demostraremos solo la primera de ellas.
Designemos con X al $L(a)$ y con Y al $L(b)$. Se cumple

$$\left.\begin{array}{rcl} X = L(x) & \Rightarrow & e^X = x \\ Y = L(y) & \Rightarrow & e^Y = y \end{array}\right\} \Rightarrow \; x\,y = e^X\,e^Y = e^{X+Y}.$$

Como $x\,y = e^{X+Y}$, de la definición de logaritmo podemos concluir que $X + Y = L(x\,y)$. Si sustituimos X por $L(x)$ e Y por $L(y)$ entonces queda $L(x) + L(y) = L(x\,y)$, que es lo que queríamos demostrar. □

Ejemplo 4.3.6. En cada uno de los siguientes casos utilizaremos propiedades operatorias de los logaritmos para transformar el número dado.

- $L(12) - L(3) = L\left(\dfrac{12}{3}\right) = L(4) = L(2^2) = 2L(2)$.
- $L(4) - L(2) + L(5) = L\left(\dfrac{4}{2}\right) + L(5) = L(2) + L(5) = L(10)$.
- $L\left(\dfrac{4}{3}\right) + L\left(\dfrac{3}{2}\right) = L(4) - L(3) + L(3) - L(2) = L(4) - L(2) = 2L(2) - L(2) = L(2)$.
- $L\left(\dfrac{4}{3}\right) + L\left(\dfrac{3}{2}\right) = L\left(\dfrac{4}{3}\,\dfrac{3}{2}\right) = L\left(\dfrac{4}{2}\right) = L(2)$. ∇

Ejemplo 4.3.7. Queremos resolver la ecuación $2L(x) - L(x+2) = L(x-1)$. Para ello procedemos a transformar la expresión utilizando propiedades operatorias de los logaritmos.

$$2L(x)-L(x+2) = L(x-1) \;\Rightarrow\; L(x^2) = L(x+2)+L(x-1) \;\Rightarrow\; L(x^2) = L\Big((x+2)(x-1)\Big)$$

Hemos llegado a una igualdad de la forma $L(f(x)) = L(g(x))$. Como la función $L(x)$ es estrictamente creciente, podemos afirmar que se cumple la igualdad $L(f(x)) = L(g(x))$ si, y solo si, se cumple la igualdad $f(x) = g(x)$.

Esta observación nos permite continuar con las transformaciones de la siguiente manera

$$L(x^2) = L\Big((x+2)(x-1)\Big) \iff x^2 = (x+2)(x-1) \iff x^2 = x^2 + x - 2$$
$$\iff x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

Tenemos que verificar en la primera ecuación que $x = 2$ cumple las condiciones de existencia, así como que efectivamente es solución. Y eso es correcto, pues queda $2L(2) - L(4) = L(1)$, que es equivalente a $L(4) - L(4) = 0$. ∇

Ejercicio 4.4.

Comprueba las siguientes igualdades.

(a) $\log_2(20) - \log_2(5) = 2$.

(b) $\log_3(15) - \log_3(5) + \log_3(27) = 4$.

(c) $2L(4) - L(8) + L(7) = L(14)$.

(d) $5L(3) - L(9) - L(27) = 0$.

(e) Si $a > 0$, $5L(a) - L(a^2) + L\left(\frac{1}{a}\right) = 2L(a)$.

(f) Si $a > 0$, $L\left(\frac{a+2}{a+1}\right) + L\left(\frac{a+1}{a}\right) = L(a+2) - L(a)$.

(g) Si $n \in \mathbb{N}$, $L(2) + L\left(\frac{3}{2}\right) + L\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + L\left(\frac{n}{n-1}\right) + L\left(\frac{n+1}{n}\right) = L(n+1)$.

Ejercicio 4.5.

Resuelve las siguientes ecuaciones.

(a) $L(x-4) = 0$.

(b) $\log_{10}(x) + \log_{10}(x+9) = 1$.

(c) $L(x+3) = L(6) - L(2x+2)$.

(d) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$.

(e) $\log_2(x^2) + 3\log_2(x) = 10$.

(f) $L(7x+1) = 2L(x+3) - L(2)$.

Observación 4.3.1. Relación entre la exponencial y la logarítmica

Si analizamos con cuidado la definición de logaritmo, podemos concluir que la función logarítmica de base e es la inversa de la función exponencial de base e. Dicho de otro modo, se cumplen las siguientes relaciones

$$e^{L(x)} = x, \quad \forall\, x \in (0, +\infty) \qquad L(e^x) = x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

$$e^X = Y \qquad \iff \qquad X = L(Y).$$

Ejemplo 4.3.8. Supongamos que queremos resolver la ecuación $2e^x - 10 = 0$. Para resolver el problema, transformamos la ecuación utilizando las siguientes equivalencias

$$2e^x - 10 = 0 \iff 2e^x = 10 \iff e^x = 5 \iff x = L(5).$$

∇

Ejemplo 4.3.9. Queremos resolver la ecuación $3e^{4x} - 10 = 11$. Al aplicar la misma estrategia que en el ejemplo **4.3.8** obtenemos

$$3e^{4x} - 10 = 11 \iff 3e^{4x} = 21 \iff e^{4x} = 7 \iff 4x = L(7) \iff x = \frac{L(7)}{4}.$$

∇

Ejercicio 4.6.

Resuelve las siguientes ecuaciones (si tienen solución) y encuentra un valor aproximado de las soluciones utilizando la calculadora.

(a) $4e^{3x} - 2 = 34$.

(b) $5 - 2e^{2x} = -3$.

(c) $e^{-2x} - \dfrac{1}{e^6} = 0$.

(d) $8 - e^{2x} = 10$.

Observación 4.3.2. Cambio de base

En las calculadoras, planillas de cálculo u otros programas, aparecen logaritmos solamente en base 10 y en base e. Cuando necesitamos calcular un logaritmo en una base diferente, conviene utilizar la siguiente fórmula, que no demostraremos:

$$\log_b(x) = \frac{L(x)}{L(b)}.$$

En el ejemplo **4.1.1**, donde $s_n = 100\,000(1,08)^n$, nos preguntábamos ¿cuántos años debemos dejar el capital depositado para obtener un saldo que iguale o supere por primera vez $\$\,1\,000\,000$? Habíamos llegado a las siguientes equivalencias

$$100\,000(1,08)^x = 1\,000\,000 \iff (1,08)^x = 10 \iff x = \log_{1,08}(10).$$

Como necesitamos calcular un logaritmo en base $1,08$, aplicamos la fórmula de cambio de base obteniendo

$$\log_{1,08}(10) = \frac{L(10)}{L(1,08)} \simeq \frac{2,3}{0,077} \simeq 29,9.$$

Concluimos que hay que dejar depositado el capital inicial de $\$\,100\,000$ durante 30 años para que el saldo en cuenta supere $\$\,1\,000\,000$.

4.4 Aplicaciones en diferentes áreas

Interés compuesto con capitalización continua

Existen otros tipos de capitalizaciones además de la anual. En particular, hay una denominada **capitalización continua** con la que el saldo al cabo de n años se obtiene con la siguiente expresión

$$\boxed{s_n \;=\; C\, e^{r\, n}}$$

La justificación de esta fórmula la encontraremos en breve.

Ejemplo 4.4.1. Tomemos los mismos datos que en el ejemplo 4.1.1, es decir $C = 100\,000$ y $r = 0,08$, pero ahora considerando capitalización continua.
El saldo en cuenta al finalizar el primer año vale $s_1 = 100\,000\; e^{0,08} \approx 108\,328,7$.
Si queremos calcular también s_2 y s_{10} aplicamos la fórmula y obtenemos
$s_2 = 100\,000\; e^{0,16} \approx 117\,351$ y $s_{10} = 100\,000\; e^{0,8} \approx 222\,554$.

Ahora bien, un inversionista quiere averiguar cuántos años debe dejar el capital depositado para obtener un saldo que supere por primera vez los 600 000 pesos. Para resolver este problema hay que hallar el menor valor del número natural n para el cual

$$100\,000\; e^{0,08\, n} \;\geq\; 600\,000.$$

Como la función exponencial es estrictamente creciente, alcanza con plantearnos

$$100\,000\; e^{0,08\, x} \;=\; 600\,000 \iff e^{0,08\, x} = 6.$$

Necesitamos entonces obtener el exponente al cual hay que elevar el número e para obtener 6. Dicho exponente es el logaritmo en base e del número 6.

$$e^{0,08\, x} \;=\; 6 \iff 0,08\, x \;=\; L(6) \iff x = \frac{L(6)}{0,08} = \frac{L(6)}{\frac{8}{100}} = L(6)\frac{100}{8} = L(6)\frac{25}{2}.$$

Si utilizamos la calculadora obtenemos $L(6) \approx 1,7917$, de donde se deduce que $x \approx 22,39$. Por lo cual, concluimos que para obtener un saldo que supere por primera vez los 600 000 pesos hay que depositar el capital inicial durante un plazo de 23 años. ∇

Ejercicio 4.7.

Se invierten $ 7 000 a una tasa de interés anual del 2 %. Calcula el saldo de la inversión luego de diez años en cada uno de los siguientes casos.

(a) El interés se capitaliza anualmente.

(b) El interés se capitaliza continuamente.

Ejercicio 4.8.

Se depositan 100 000 pesos a una tasa de interés anual del 5 % que se capitaliza continuamente.

(a) Calcula el saldo de la inversión al cabo de cinco años.

(b) ¿Cuál es la cantidad mínima de años que se debe dejar el dinero para superar por primera vez un saldo de $ 230 000?

Ejercicio 4.9.

Se depositan $ 100 000 a una tasa de interés anual del 10 % que se capitaliza continuamente. Calcula la cantidad mínima de años que se debe dejar el dinero depositado para superar por primera vez un saldo de $ 300 000.

Ejercicio 4.10.

Una persona A invierte 10 000 dólares a comienzos de 1990 y otra persona B invierte 20 000 dólares a comienzos de 2000.

(a) Si ambos reciben intereses del 4 % capitalizados continuamente, ¿cuáles serán los valores de las inversiones al finalizar el año 2010?

(b) ¿Cuál debería ser la tasa común de interés (ya no necesariamente del 4 %), para que A y B finalicen con el mismo capital al terminar el año 2010?

Observación 4.4.1. Significado de la capitalización continua y el número *e*

Los bancos también ofrecen otros tipos de capitalización. Si nos mantenemos con una tasa r de interés anual, los intereses pueden pagarse de manera semestral, es decir, dos veces al año. Al finalizar el primer semestre, el saldo provisorio sería $C\left(1+\frac{r}{2}\right)$ que, a su vez, genera intereses para el segundo semestre. Así, al finalizar el primer año, se obtiene un saldo de $C\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)$. Esto se llama capitalización semestral y quiere decir que

$$s_1 = C\left(1+\frac{r}{2}\right)^2.$$

Volvemos nuevamente al ejemplo **4.1.1.** Si la capitalización es anual habíamos obtenido $s_1 = 108\,000$, mientras que, si la capitalización es semestral, el saldo al cabo de un año es mayor y asciende a $s_1 = 108\,160$.
Si continuamos de esta manera, con una capitalización mensual tendríamos

$$s_1 = C\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}.$$

En el ejemplo planteado da $s_1 = 108\,300$. Parece intuitivo que, cuanto más a menudo se capitalice el interés, mayor será el saldo final.
Puedes verificar fácilmente que si x es el número de veces por año que se capitaliza el interés, entonces el saldo en cuenta a un año y el saldo en cuenta en el enésimo año cumplen

$$s_1 = C\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x} \qquad s_n = C\left(1+\frac{r}{x}\right)^{n\,x}$$

Es razonable preguntarse si existe el límite de las expresiones anteriores cuando $x \to +\infty$. Eso sería algo así como una capitalización instantánea, también llamada **capitalización continua.** Por otra parte, el matemático Jacobo Bernoulli (1654-1705) demostró que el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ da como resultado el número e.
Admitiendo entonces los siguientes límites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x} = e^{r}.$$

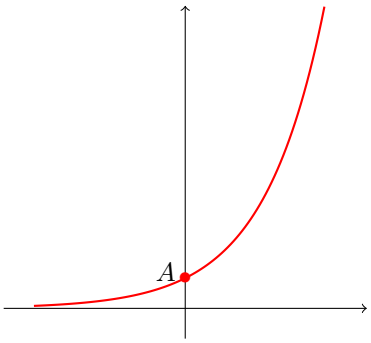
podemos concluir que, si la capitalización es continua, entonces el saldo al finalizar el primer año y el saldo al finalizar el enésimo año son, respectivamente,

$$s_1 = C\,e^{r} \qquad s_n = C\,e^{r\,n}$$

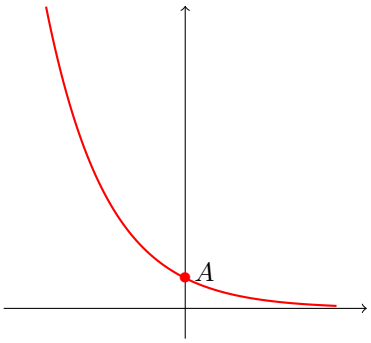
Evolución de poblaciones

En diversas ocasiones resulta de utilidad modelar la evolución de cierto fenómeno suponiendo que el tiempo que transcurre es continuo. En varias aplicaciones, y al menos durante cierto lapso de tiempo, esa evolución se ajusta bastante bien a un modelo exponencial de la forma $F(t) = A\,e^{kt}$, donde A y k son constantes y la variable t varía en los reales. Si se cumple que $A > 0$, entonces

- $F(t) = A\,e^{kt}$ es estrictamente creciente si $k > 0$.



- $F(t) = A\,e^{kt}$ es estrictamente decreciente si $k < 0$.



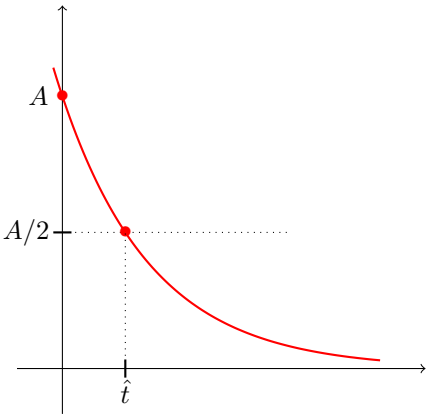
La interpretación de la constante A es muy simple. En efecto, se cumple que $A = F(0)$, por lo cual está asociado al valor poblacional inicial. Más adelante veremos la interpretación de k, aunque ya podemos observar que tiene incidencia en la velocidad con que crece o decrece esta función.

Ejemplo 4.4.2. Consideremos la función $F(t) = A\,e^{kt}$ y supongamos que se sabe que $F(0) = 1000$ y que $F(3) = 10\,000$. ¿Cómo hacemos para determinar los valores de A y k? Para A es muy sencillo: $A = F(0) = 1000$. La función queda entonces $F(t) = 1000\,e^{kt}$. Para hallar k utilizamos la otra condición que nos dice que el valor de la función debe ser $10\,000$ cuando t vale 3. Sustituimos la t por 3 e igualamos el valor funcional a $10\,000$:

$$F(3) = 10000 \iff 1000e^{3k} = 10\,000 \iff e^{3k} = 10 \iff 3k = L(10) \iff k = \frac{L(10)}{3}.$$

∇

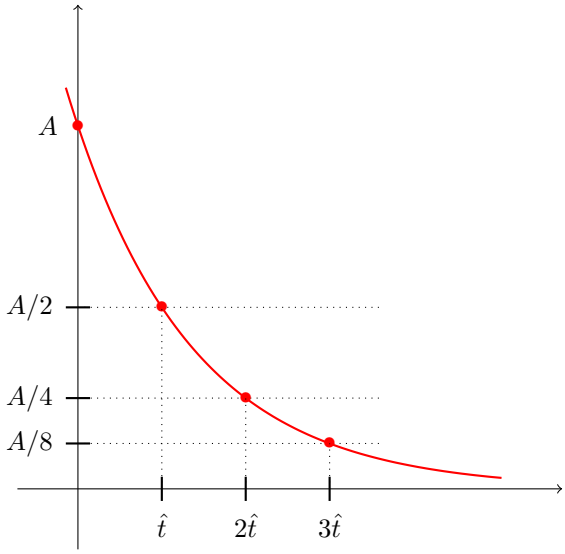
Ejemplo 4.4.3. Dado el modelo de evolución $F(t) = A\,e^{kt}, \quad A > 0, \quad k < 0$, el *tiempo de vida media* es aquel tiempo $\hat{t}$ que debe pasar para que la población inicial se reduzca a la mitad.



¿Cómo lo calculamos? Queremos hallar el tiempo $\hat{t}$ que cumple $F(\hat{t}) = \dfrac{A}{2}$, es decir,

$$A\,e^{k\,\hat{t}} = \frac{A}{2} \iff e^{k\,\hat{t}} = \frac{1}{2} \iff k\,\hat{t} = L\left(\frac{1}{2}\right) \iff k\,\hat{t} = -L\,(2) \iff \hat{t} = -\frac{L\,(2)}{k}.$$

Se deduce que el tiempo de vida media es $\hat{t} = -\dfrac{L\,(2)}{k}$. Una observación interesante es que el resultado no depende de A. Es decir, en este modelo, el tiempo que debe pasar para que una población se reduzca a la mitad es siempre el mismo, independientemente de cuánto valga esa población.



∇

Ejercicio 4.11.

Supongamos que el tamaño de una población de bacterias tiene un crecimiento exponencial dado por $P(t) = A\,e^{kt}$, donde t se mide en días.

(a) Encuentra A y k sabiendo que la población inicial (en $t = 0$) es 10^6 y que al cabo de tres días el tamaño de la población llegó al valor $10^6\ e^6$ bacterias.

(b) Encuentra el tamaño de la población transcurridos seis días del instante inicial.

Ejercicio 4.12.

Durante los años 1990 y 2000 la utilidad anual de una empresa tuvo un crecimiento exponencial dado por $U(t) = A\,e^{kt}$, donde $U(t)$ es la utilidad en miles de pesos y t se mide en años. En $t = 0$ (que corresponde al final del ejercicio del año 1990) la ganancia fue de \$ 200 000. La ganancia anual de 1992 fue de \$ 400 000. Encuentra el año al final del cual la ganancia supera por primera vez los \$ 2 000 000.

Ejercicio 4.13.

Un cultivo de estreptococos del grupo A recién inoculados (un grupo común de microorganismos que causa infección séptica en la garganta) contiene 100 células. Al chequear el cultivo 60 minutos después se observa que hay 450 células. Suponiendo que dicha población tiene un crecimiento exponencial del tipo $P(t) = A\,e^{kt}$, determina el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos). ¿Cuál es el tiempo requerido para que el número de células se duplique?

Ejercicio 4.14.

Una taza de café instantáneo recién servida tiene una temperatura de 82°. Después de permanecer dos minutos en una habitación a 21°, el café se enfría hasta 74°. Suponiendo que la temperatura de la taza en cada instante t (medido en minutos) viene dada por $T(t) = Ae^{kt} + 21$, encuentra las constantes A y k. ¿En qué tiempo llega el café a una temperatura tolerable de 49°?

Ejercicio 4.15.

Una tribu que vive aislada en el Amazonas tiene 1100 habitantes. Sorpresivamente es afectada por un virus. A partir de ese momento, el tamaño de la población comienza a tener un decrecimiento dado por $P(t) = Ae^{kt} + 100$, donde $P(t)$ es la cantidad de individuos vivos y t se mide en días (estamos suponiendo que en $t = 0$ hay 1100 individuos). Al cabo de dos días sin ayuda sanitaria la población se redujo a 468 personas. Suponiendo que el modelo se mantiene, ¿cuántos habitantes quedarán al cabo de 10 días?

Ejercicio 4.16.

La desintegración de elementos radiactivos suele modelarse mediante una función de la forma $y(t) = A\, e^{kt}$, donde t representa la cantidad de masa radiactiva en el tiempo. Se ha calculado que el período de vida media del carbono-14 es de 5730 años. Es decir, si se tienen 2 gramos en la actualidad, dentro de 5730 años quedará aproximadamente 1 gramo.

(a) Deduce que la constante de decrecimiento k vale $k = -(L2)/5730 \approx -1,20968 \times 10^{-4}$.

(b) Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ hay 50 gramos de carbono-14. Determina la constante A y calcula la cantidad que quedaría después de transcurridos 100 años.

Ejercicio 4.17.

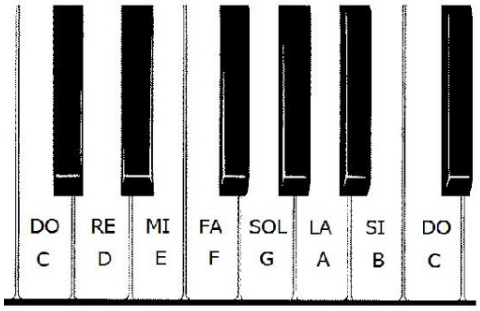
Supongamos que el tamaño de una población viene dado por el modelo $P(t) = A\, e^{kt}$, donde $A > 0$.

(a) Si $k > 0$, encuentra el tiempo que debe pasar para que la población inicial se duplique.

(b) Si $k < 0$, encuentra el tiempo que debe pasar para que la población inicial se reduzca a la tercera parte.

Notas musicales

En esta figura aparece una octava de un piano. Tenemos siete teclas blancas que corresponden a las notas do, re, mi, fa, sol, la y si, y cinco teclas negras que corresponden a algunos sostenidos, en orden de izquierda a derecha: $do^\sharp$, $re^\sharp$, $fa^\sharp$, $sol^\sharp$ y $la^\sharp$. En cada octava hay, entonces, doce teclas, cada una de las cuales corresponde a un semitono. En el piano hay varias octavas de este tipo, desde las más graves, ubicadas a la izquierda, hasta las más agudas, hacia la derecha. En las guitarras ocurre algo similar, aunque se cubren menos octavas que en el piano.



Entre tantas preguntas que podríamos hacernos, planteamos dos.

- ¿Cuál es la relación de frecuencias que hay entre un semitono y el que le sigue?
- ¿Cómo hacen los lutieres para construir los trastes en el mástil de una guitarra?

Con la matemática que venimos estudiando podemos responder ambas preguntas. De hecho, todo esto lo crearon Pitágoras y sus alumnos unos 500 años antes de Cristo. Solamente necesitamos conocer unas pocas cuestiones que provienen de la música y de la parte de la física que estudia la vibración de las cuerdas.

- Cada nota que percibe nuestro oído está relacionada con la frecuencia a la que vibra una cuerda.
- La frecuencia (en Hertz) es la cantidad de ciclos (oscilaciones) por segundo que desarrolla la cuerda al vibrar. Cuanto más rápido, la frecuencia es mayor y el sonido es más agudo.
- En este tipo de instrumentos en los que se utiliza la usual **afinación bien temperada**, la frecuencia de cada nota es exactamente el doble de la misma nota una octava antes. Por ejemplo, en una guitarra, si tocan la sexta cuerda al aire se obtiene un mi de frecuencia $82,41$ Hz, mientras que si tocan la misma sexta cuerda en el traste 12 (una octava más arriba) también se escucha un mi, pero a una frecuencia de $164,82$ Hz (exactamente el doble).
- La relación entre la frecuencia de un semitono y del siguiente es siempre la misma. Es decir, la frecuencia de cada semitono se obtiene multiplicando la del anterior por una constante universal que llamaremos r.

Ya está, con eso alcanza. ¿Por qué? Si partimos de un semitono cualquiera, digamos de frecuencia f, el siguiente tendrá frecuencia $f\,r$. La frecuencia del siguiente se obtiene multiplicando $f\,r$ por r y por lo tanto da $f\,r^2$. Entonces, las frecuencias seguidas quedan en progresión geométrica:

$$f,\ fr,\ fr^2,\ fr^3,\ fr^4,\ fr^5,\ldots,\ f\,r^{12}.$$

$f\,r^{12}$ es la octava siguiente más aguda de f. Por lo tanto llegamos a la siguiente relación

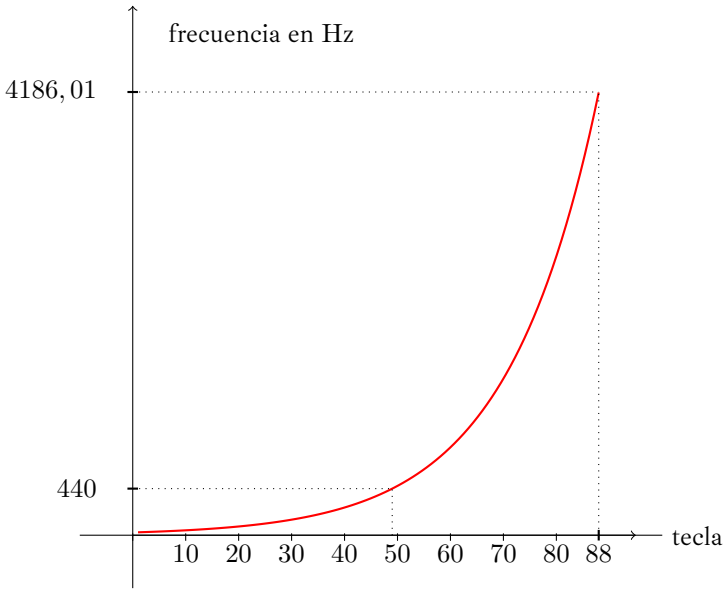
$$f\,r^{12} \;=\; 2\,f.$$

Queda una ecuación de donde se puede despejar r:

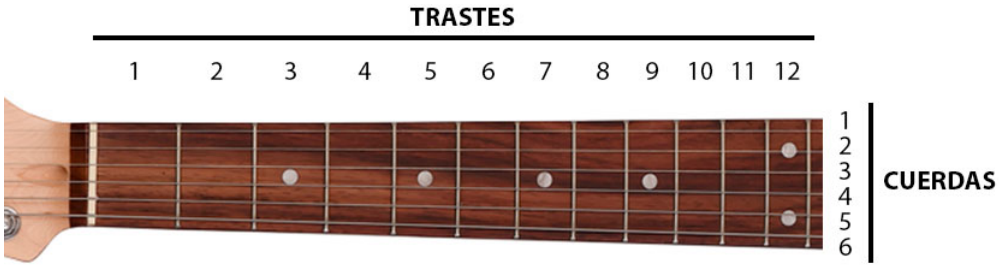
$$f\,r^{12} = 2\,f \;\;\Longrightarrow\;\; r^{12} = 2 \;\;\Longrightarrow\;\; r = \sqrt[12]{2} \sim 1,05946309.$$

Así que esta magnífica constante es $r = \sqrt[12]{2} \sim 1,05946309$. Cada vez que pasamos de un semitono al siguiente estamos multiplicando la primera frecuencia por ese número r.
Por ejemplo, en un piano de 88 teclas, la primera de la izquierda (la más grave) está afinada en una frecuencia de $27,5$ Hz. Entonces, la segunda tecla da lugar a una frecuencia de $27,5\;r \;\approx\; 29,1353$ Hz. La tecla 49 da una frecuencia de 440 Hz (el célebre LA-440), número que se obtiene al calcular $27,5\;r^{48}$.
Por su parte, la tecla 88 da lugar a la frecuencia más aguda de todas, que se obtiene al calcular $27,5\;r^{87}$ y que da 4186 Hz.
La siguiente gráfica muestra las frecuencias en función de las teclas. Su fórmula es

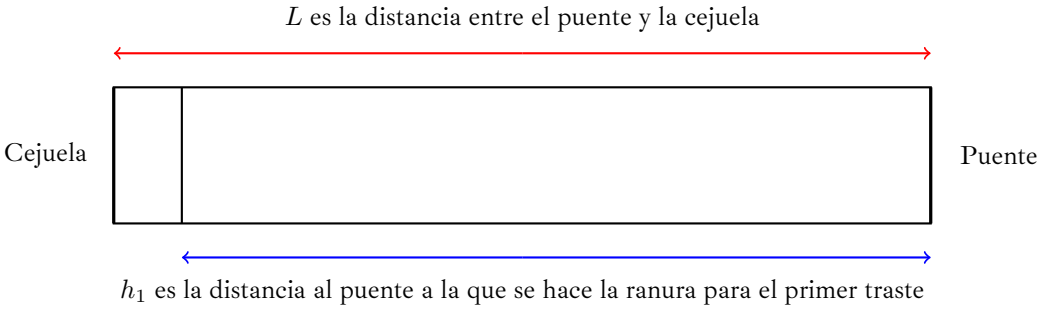
$$f(x) = 27,5\;r^{x-1}.$$



Pasemos a la segunda pregunta, es decir, ¿cómo se construyen los trastes de una guitarra? Porque habrán observado que los trastes tienen longitudes diferentes:



Esto se basa en el hecho de que la frecuencia y la longitud de la cuerda están relacionadas de forma inversamente proporcional. Entonces, aparece también de forma relevante el inverso de r, que denominamos α y que vale $\alpha = \frac{1}{r} \sim 0,943874$. Designemos con la letra L la distancia que hay entre el puente de la guitarra y la cejuela (traste 0), es decir, la longitud de las cuerdas vibrantes que se encuentran apoyadas en dos puntos fijos: el puente y la cejuela. Para calcular la distancia h_1 entre el puente y la ranura del primer traste debemos multiplicar L por α, es decir, $h_1 = L\,\alpha$.



El proceso se continúa de forma recurrente. O sea, si h_n es la distancia entre el puente y la ranura del enésimo traste, entonces se cumple que $h_n = \alpha\, h_{n-1}$.

Es bastante habitual considerar $L = 650$ mm. En ese caso resulta $h_1 = 650\,.\,0,943874 \sim 613,5$. La ranura para colocar el primer traste debe colocarse entonces a $613,5$ mm del puente. Se tiene que $h_2 = 613,5\,.0,943874 \sim 579$, y así sucesivamente. Resulta interesante observar que $h_{12} = 325$, que es precisamente la mitad de la longitud de las cuerdas.

4.5 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 4.18.

Comprueba las siguientes igualdades.

(a) $2L(m) - L(3m) = L(m/3),\ \forall\, m > 0.$

(b) $4L(a) + L(b) - 3L(3a) = L\left(\dfrac{a\,b}{27}\right),\ \forall\, a > 0,\ \forall\, b > 0.$

Ejercicio 4.19.

La solución de la ecuación $e^{4x} - \dfrac{1}{e^{-3}} = 0$ es

1. $\dfrac{L(3)}{4}$.
2. $3/4$.
3. $L\left(\dfrac{3}{4}\right)$.
4. $3/2$.

Ejercicio 4.20.

Una población tiene un crecimiento exponencial del tipo $P(t) = Ae^{t/2}$ con $A > 0$. La población inicial $P(0)$ pasará a quintuplicarse en un tiempo $\hat{t}$. Entonces el valor de $\hat{t}$ es

1. $5L(2)$.
2. $5A$.
3. $2L(5)$.
4. $L\left(\dfrac{A}{5}\right)$.

Ejercicio 4.21.

La temperatura de un líquido en un proceso de producción decrece exponencialmente en función del tiempo como $T(t) = Ae^{-t}$, con $A > 0$. En tiempo t_0 la temperatura baja a la cuarta parte de la temperatura inicial. Entonces t_0 es

1. $L(2)$.
2. $L(4)$.
3. $-L(4)$.
4. $1/2$.
5. $\dfrac{A}{4}$.

Ejercicio 4.22.

Una población tiene un crecimiento exponencial del tipo $P(t) = Ae^{kt}$ con $A > 0$. $P(0)$ es la población inicial, y en un tiempo $t = 3$ se duplica. Entonces el valor de k es

1. $\dfrac{L(2)}{3}$.
2. $\dfrac{L(3)}{2}$.
3. $L(2)$.
4. $L\,(3)$.

Capítulo 5

Límites para $x \longrightarrow a$

Supongamos que en un viaje en auto desde Montevideo (kilómetro 0) a Minas (kilómetro 120), se salió a la hora 8.00 y se llegó a las 9.30. Es de sentido común (aunque también se formaliza en cursos de Física de enseñanza media), considerar la velocidad promedio del viaje como el cociente entre la distancia total recorrida (en km) y el tiempo (en horas) empleado en recorrerla. En este caso, la velocidad promedio del viaje es de $\frac{120}{1,5} = 80$ km/h.

Si observamos el velocímetro del auto, vemos que la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo, lo cual es obvio ya que la velocidad del auto puede variar. El velocímetro indica una velocidad definida en cada momento. Pero, ¿cómo obtenemos esas velocidades instantáneas? Una idea razonable consiste en considerar velocidades promedio en intervalos de tiempo pequeños y pensar en una especie de límite cuando el tamaño de esos intervalos tienda a 0.

Esta idea, y muchas otras que aparecen en aplicaciones a las más diversas ciencias, llevó a los matemáticos a analizar qué ocurre con el comportamiento de los valores funcionales $f(x)$ de una función f cuando los valores de x se encuentran muy próximos a un punto a. Este concepto, el de límite matemático, implica una formalidad mayor a la esperada en el curso, y es por ello que daremos solamente aproximaciones a su definición rigurosa.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=PJNt_Gdd09A&t=19s` (Límites 1 parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=Uc41-vkqD6s` (Límites 1 parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=K5e0V8My554` (Límites 1 parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=qjVB1VY6B1E` (Límites 1 parte 4)

5.1 Límites finitos para $x \longrightarrow a$

Ejemplo 5.1.1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. El dominio de la función f no incluye el número 2 por ser este la única raíz de su denominador. Una pregunta que nos interesa contestar es qué ocurre con la evolución de los valores funcionales $f(x)$ a medida que x se acerca al número 2 (sin llegar a $x = 2$). En la siguiente tabla se muestran algunos valores:

x	$f(x)$
$1,9$	$3,9$
$1,95$	$3,95$
$1,99$	$3,99$
$2,01$	$4,01$
$2,05$	$4,05$
$2,1$	$4,1$

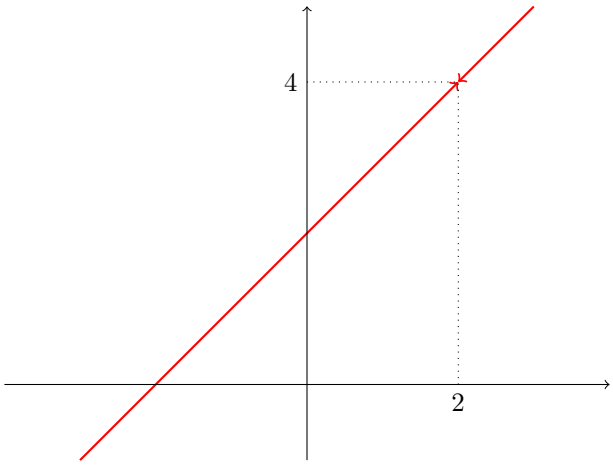
El análisis de la tabla parece indicar que los valores $f(x)$ se acercan al número 4 a medida que los valores de x se acercan al número 2, obviamente sin llegar a $x = 2$. Vale la pena destacar que esta afirmación sería correcta tanto para los valores de x menores a 2 (aproximación por izquierda) y como para los valores de x mayores a 2 (aproximación por derecha).

Sin embargo, lo que sucede en matemática es que no es posible demostrar cual es el límite de una función mediante la aplicación de tablas de valores funcionales. La noción de cercanía es relativa y podría ocurrir que para valores de x mucho más cercanos al 2 el comportamiento de la función cambie de manera abrupta.

En este caso particular, una manera de acercarnos a una demostración formal de las posibles conclusiones que obtuvimos en el análisis de la tabla es la siguiente. Para todo número real x diferente de 2 se cumple

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = x + 2.$$

Ahora sí es más razonable la conjetura, pues si x toma valores muy próximos a 2, la expresión $x + 2$ tomará valores muy próximos a 4. De hecho, eso se puede verificar gráficamente por que la función es lineal. Más precisamente, la función f coincide con la función lineal $g(x) = x + 2$ para todo $x \neq 2$.



Para indicar que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 vale 4 utilizamos la notación $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. ∇

Es posible extender el análisis desarrollado en el ejemplo previo a situaciones más generales. Se dice que el **límite** de una función $f(x)$, cuando x tiende al punto a, es el número L, si los valores $f(x)$ se encuentran tan cerca de L como uno quiera con tal de tomar los valores de x suficientemente próximos al número a. En notación matemática establecemos

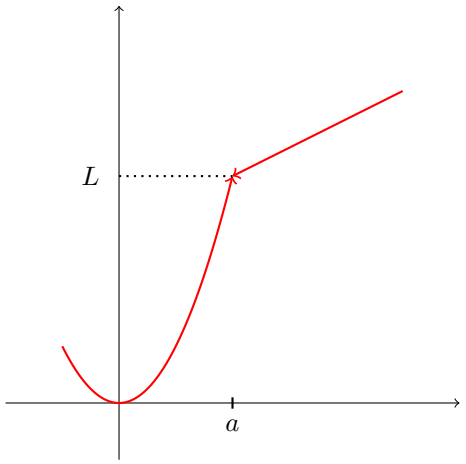
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) \;=\; L \qquad \text{o también} \qquad f(x) \longrightarrow L \;\text{ si }\; x \longrightarrow a.$$

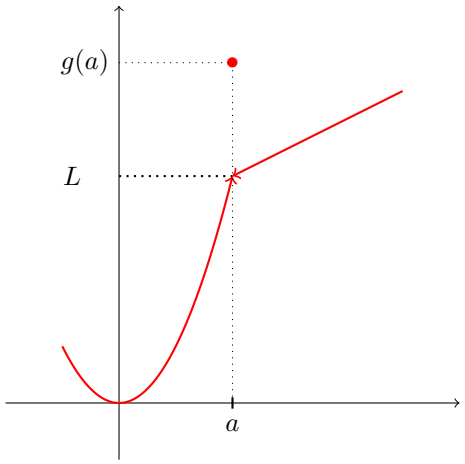
Vale destacar que en todos estos casos el resultado del límite de la función es un número L, y suele decirse que el límite es **finito**.

Es importante aclarar que la extensión que acabamos de realizar no constituye una definición matemáticamente precisa de límite, sino una explicación intuitiva. Si bien no trabajaremos la definición formal en este curso, todos los resultados que obtengamos a lo largo del libro cumplirán con ella.

Observación 5.1.1. El valor del límite L y el valor funcional $f(a)$
En la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ no se considera la existencia del valor $f(a)$. Dicho de otra forma, el punto a puede no pertenecer al dominio de la función f. Desde el punto de vista intuitivo tenemos que imaginar que los valores de x se acercan indefinidamente hacia el punto a, pero que no llegan al valor $x = a$. También corresponde enfatizar que, aún cuando $f(a)$ exista, el valor del límite L puede no coincidir con $f(a)$.

Ejemplo 5.1.2. Presentamos las gráficas de dos funciones f y g que tienen límite L para x tendiendo al punto a, es decir, que cumplen $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$. En el primer caso, el punto a no perteneces al dominio de f. En el segundo, si bien existe $g(a)$, el límite L es diferente de $g(a)$.





∇

Con el objetivo de avanzar en el cálculo de límites de funciones, es necesario enunciar dos teoremas importantes. El teorema 5.1.1 nos permite operar con límites porque nos indica que, en caso de existir, el $\lim_{x\to a} f(x) = L$ es único. El teorema 5.1.2 utiliza el resultado del teorema de unicidad y establece una regla muy simple para su cálculo en ciertas funciones.

Teorema 5.1.1. Unicidad del límite finito

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = G$ *entonces* $L = G$.

Teorema 5.1.2. Operaciones básicas con límites finitos

Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = B$ *entonces se cumple*

- $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = A - B$.
- $\lim_{x\to a} (f(x)\ g(x)) = A\ B$.
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *en el caso de que* $B \neq 0$.

Ejemplo 5.1.3. El teorema 5.1.2 nos permite calcular los siguientes límites.

- $\lim_{x\to 1} (x^3 - 5x^2 + 4x - 7) = -7$.
- $\lim_{x\to 2} (x^3 - 1)(x + 1) = 21$.
- $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{5}{4}$.
- $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{0}{2} = 0$.

∇

Ejercicio 5.1.

Grafica con GeoGebra las funciones del ejemplo 5.1.3 y observa en las gráficas a qué valores se aproxima la función cuando x tiende a los valores indicados en el ejemplo.

5.2 Límites infinitos para $x \longrightarrow a$

Ejemplo 5.2.1. Si pensamos en el máximo dominio posible en el que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ está definida, nos damos cuenta de que es $\mathbb{R} - \{0\}$. Nuevamente, la pregunta que puede surgir es conocer el comportamiento de la función cuando x se acerca a 0. La función que debemos analizar es un cociente. Cuando x tiende a 0, el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a 0. Esta situación no está contemplada en el teorema 5.1.2. Volvemos a aplicar el recurso numérico de tabular valores de x cercanos a cero con sus respectivas imágenes $f(x)$ con el fin de imaginar qué puede estar sucediendo.

x	$f(x)$
$-0,1$	100
$-0,01$	10000
$-0,001$	1000000
$0,001$	1000000
$0,01$	10000
$0,1$	100

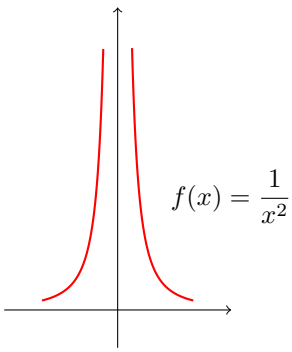
La tabla parece indicar que los valores funcionales son cada vez más grandes si tomamos valores de x cada vez más cercanos a 0. Para razonar con mayor precisión desde el punto de vista matemático, observamos que si tomamos valores de x cada vez más próximos a 0, entonces x^2 será siempre positivo y cada vez más pequeño. Por lo tanto, su inverso $\frac{1}{x^2}$ tomará valores positivos y cada vez más grandes.

Dicho de otro modo, la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tomará valores tan grandes como se quiera, siempre que x esté suficientemente cerca de 0.

Esta situación se denota

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

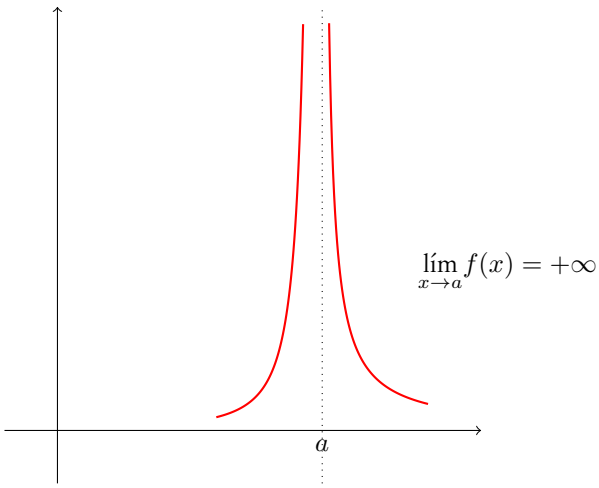
Si graficamos la función $f(x)$, observamos que concuerda con los valores funcionales más grandes a medida que nos acercamos a 0.



∇

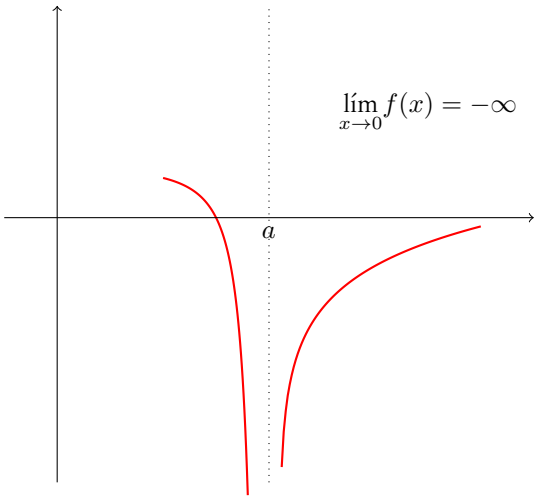
Es posible establecer que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$ si los valores $f(x)$ pueden hacerse tan grandes como se quiera, siempre que los valores de x estén suficientemente próximos al número a. En notación matemática:

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \qquad \text{o también} \qquad f(x) \longrightarrow +\infty \text{ si } x \longrightarrow a.$$



De manera similar, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $-\infty$ cuando el opuesto de la función tiene límite $+\infty$. Es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \longrightarrow a} -f(x) = +\infty.$$



Ejercicio 5.2.

1. En cada uno de los siguientes casos grafica la función f utilizando GeoGebra.
2. Observando la gráfica, conjetura cuál es el $\lim_{x\to a} f(x)$.
3. Pide a GeoGebra que calcule el $\lim_{x\to a} f(x)$.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $a = 0$.

(b) $f(x) = -\dfrac{1}{x^4}$, $a = 0$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $a = 1$.

(d) $f(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $a = 1$.

(e) $f(x) = L|x|$, $a = 0$.

(f) $f(x) = -L|x-3|$, $a = 3$.

Actividad con GeoGebra 5.1.

Se considera la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

1. Accede al enlace y observa que hay dos deslizadores, uno que corresponde a un valor $y = k$ y otro a pares $(x, f(x))$. Elige un valor de k y, utilizando el primer deslizador, encuentra un valor de x para el cual su imagen sea mayor que k.
2. Repite este paso algunas veces.
3. ¿Cuáles son todos los valores de x cuyas imágenes son mayores que 10? ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando $x \to 0$?
4. A partir de lo realizado en el apartado anterior, dado cualquier valor de k tan grande como se quiera, ¿es posible encontrar un $\delta > 0$ para el cual se cumpla que para cualquier $x \neq 0$, con $-\delta < x < \delta$, se verifique que $f(x) > k$?

5.3 Cálculo de límites

Conociendo los límites de dos funciones para $x \to a$, interesa saber qué sucede con el límite si hacemos operaciones con esas funciones, en particular, qué pasará con el límite de la suma, el producto y el cociente de ambas funciones. De forma análoga a lo que se presentó en el teorema 5.1.2, el próximo teorema establece una serie de resultados concluyentes al respecto, no solo con límites finitos sino también infinitos. Presentaremos los distintos casos en tres tablas, una para cada operación. Por ejemplo, el esquema indicado en la cuarta fila de la primera tabla establece que si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces se cumple que $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ (resultado que, dicho sea de paso, es muy intuitivo y bastante razonable de conjeturar).

Teorema 5.3.1. Límites de la función suma, producto y cociente

f	g	$f+g$
$\longrightarrow A$	$\longrightarrow B$	$\longrightarrow A+B$
$\longrightarrow +\infty$	$\longrightarrow B$	$\longrightarrow +\infty$
$\longrightarrow -\infty$	$\longrightarrow B$	$\longrightarrow -\infty$
$\longrightarrow +\infty$	$\longrightarrow +\infty$	$\longrightarrow +\infty$
$\longrightarrow -\infty$	$\longrightarrow -\infty$	$\longrightarrow -\infty$
$\longrightarrow +\infty$	$\longrightarrow -\infty$	*Indeterminado*

f	g	$f.g$
$\longrightarrow A$	$\longrightarrow B$	$\longrightarrow A.B$
$\longrightarrow A \neq 0$	$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow \infty$ *(regla de los signos)*
$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow \infty$ *(regla de los signos)*
$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow 0$	*Indeterminado*

f	g	f/g
$\longrightarrow A$	$\longrightarrow B \neq 0$	$\longrightarrow A/B$
$\longrightarrow A \neq 0$	$\longrightarrow 0$ *por valores positivos*	$\longrightarrow \infty$ *(regla de los signos)*
$\longrightarrow A \neq 0$	$\longrightarrow 0$ *por valores negativos*	$\longrightarrow \infty$ *(regla de los signos)*
$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow B$	$\longrightarrow \infty$ *(regla de los signos)*
$\longrightarrow A$	$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow 0$
$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	$\longrightarrow +\infty$ *o* $-\infty$	*Indeterminado*
$\longrightarrow 0$	$\longrightarrow 0$	*Indeterminado*

Observación 5.3.1. Sobre la noción de indeterminación

En las tablas anteriores hay cuatro casos en los que aparece la palabra *indeterminado*. Cuando decimos que estamos frente a una indeterminación, o que un límite es indeterminado, queremos decir que no hay ningún teorema que nos permita saber, *a priori*, el resultado del límite. Este dependerá de cada caso particular. Observemos el cálculo de los siguientes dos límites de funciones para $x \to 2$:

$$(A)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}. \qquad (B)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3}.$$

En ambos estamos en presencia de dos funciones que son un cociente, en las que tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Sin embargo, los límites planteados tienen resultados diferentes.

En efecto, el caso (A) fue analizado en el ejemplo 5.1.1, donde habíamos concluido que $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$, mientras que para el caso (B) podemos proceder de la siguiente manera

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^2} = +\infty.$$

El resultado del límite es $+\infty$ porque el numerador tiende a 4 y el denominador tiende a 0 y es positivo.

En resumen, para las operaciones mencionadas hay solo cuatro casos de indeterminación.

1. **Suma:** si un sumando tiende a $+\infty$ y el otro a $-\infty$.
2. **Producto:** si un factor tiende a 0 y el otro a ∞.
3. **Cociente:** si el numerador tiende a 0 y el denominador también tiende a 0.
4. **Cociente:** si el numerador tiende a ∞ y el denominador también tiende a ∞ (no importan los signos).

Para estos casos de indeterminación debemos encontrar algunos métodos que nos permitan calcular el límite. En los demás casos no hay inconvenientes, ya que el resultado es conocido.

Ejercicio 5.3.

Supongamos que tenemos cuatro funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 7, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a} j(x) = 0^+.$$

El último caso significa que $j(x)$ tiene límite 0 y que además es positiva si x está suficientemente próxima al punto a. Calcula los siguientes límites en los casos que sea posible.

(a) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.
(b) $\lim_{x\to a} (f(x)+h(x))$.
(c) $\lim_{x\to a} (f(x)+j(x))$.
(d) $\lim_{x\to a} (f(x).g(x))$.
(e) $\lim_{x\to a} (f(x).h(x))$.
(f) $\lim_{x\to a} (f(x).j(x))$.
(g) $\lim_{x\to a} (g(x)+j(x))$.
(h) $\lim_{x\to a} (g(x).h(x))$.
(i) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
(j) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$.
(k) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{j(x)}$.
(l) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.
(m) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{j(x)}$.
(n) $\lim_{x\to a} \dfrac{j(x)}{g(x)}$.
(o) $\lim_{x\to a} \dfrac{j(x)}{h(x)}$.

Ejercicio 5.4.

Si se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces el resultado del $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)-6}$ es

1. 1.
2. 0.
3. $-\infty$.
4. $+\infty$.

Actividad con GeoGebra 5.2.

En este enlace encontrarás una tabla en la que puedes ver las imágenes de las siguientes funciones para diferentes valores de x próximos a 1. Para ello debes mover el deslizador que se encuentra a la izquierda.

$$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \frac{4x^2+2x}{5x-1}.$$
$$g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = \frac{x^3-1}{x-1}.$$
$$h : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = \frac{L\left(x^2\right)}{x-1}.$$
$$i : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \;/\; i(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$
$$j : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \;/\; j(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

1. A partir de lo observado, estima el valor de
   (a) $\lim_{x\to 1} f(x)$.
   (b) $\lim_{x\to 1} g(x)$.
   (c) $\lim_{x\to 1} h(x)$.
   (d) $\lim_{x\to 1} i(x)$.
   (e) $\lim_{x\to 1} j(x)$.
2. Aplicando el teorema 5.1.2, estima los siguientes límites.
   (a) $\lim_{x\to 1} (f(x)+g(x))$.
   (b) $\lim_{x\to 1} h(x)\, g(x)$.
   (c) $\lim_{x\to 1} (f(x)-i(x))\; h(x)$.
   (d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{i(x)}{g(x)} + f(x)$.
   (e) $\lim_{x\to 1} (h(x)+j(x))$.

5.4 Cociente de polinomios para $x \to a$

En la observación 5.3.1 vimos dos casos de indeterminación para cocientes de polinomios. En ambos, el punto a era raíz tanto del numerador como del denominador y, precisamente, eso conducía a la indeterminación. En ambos casos se logró calcular el límite factorizando los polinomios y luego simplificando. Esta manera de proceder es un método general para estas situaciones.

Ejemplo 5.4.1. Queremos calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.
En primer lugar observamos que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

∇

Ejemplo 5.4.2. Queremos calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+2x+1}{2x^2-3x+1}$. Observamos nuevamente que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 1$. Esto quiere decir que el valor 1 es raíz del numerador y del denominador. Podemos utilizar esta información para factorizar el polinomio del numerador, que es un polinomio de grado 3. En esta situación recordamos que podemos aplicar el esquema de Ruffini.

	1	−4	2	1
1		1	−3	−1
	1	−3	−1	0

Entonces podemos realizar las siguientes deducciones

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+2x+1}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-3x-1)}{(x-1)(2x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2-3x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x-1}{2x-1} = -3.\end{aligned}$$

∇

Ejercicio 5.5.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2+x}{2-x}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+x^2}{x-x^2}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+4x^2}{x^4-2x^2}$.

(d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-5x+6}$.

(f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^3-1}$.

(g) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$.

(h) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$.

Ejemplo 5.4.3. Queremos hallar las constantes a y b para que se cumpla que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+ax+b}{x^2-1} = 6.$$

Como siempre, lo primero que tenemos que ver es a qué tiende el numerador y a qué tiende el denominador cuando $x \to 1$. El numerador tiende al valor $1+a+b$ y el denominador tiende a 0. Si el numerador tendiera a un valor distinto que 0, entonces el límite sería $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del signo del número $1+a+b$. Pero no queremos que eso pase, ya que la consigna establece que el límite debe dar 6 como resultado. La única posibilidad que nos queda es imponer que $1+a+b=0$ y continuar trabajando. Bajo esta condición, 1 es raíz del numerador y del denominador y, por lo tanto, podemos aplicar el método que se desarrolla en esta sección. A los efectos de factorizar el numerador, sabiendo ahora que 1 es raíz, puede ser conveniente aplicar el esquema de Ruffini.

	1	a	b
1		1	$a+1$
	1	$a+1$	$a+b+1$

Concluimos que el numerador se puede factorizar entonces de la siguiente manera $x^2+ax+b=(x-1)(x+a+1)$. Se tiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+ax+b}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+a+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+a+1}{x+1} = \frac{a+2}{2}.$$

Queremos que el resultado sea 6, por lo tanto

$$\frac{a+2}{2} = 6 \iff a+2=12 \iff a=10.$$

Al sustituir este valor $a=10$ en la condición impuesta $1+a+b=0$ se obtiene $b=-11$. ∇

Ejercicio 5.6.

Halla los valores de a y b para que $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+ax+b}{x^2-9} = \frac{5}{6}$.

Ejercicio 5.7.

Halla el valor de a para que el límite $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+a}$ sea finito y distinto de 0. Calcula el valor de dicho límite.

Ejercicio 5.8.

Halla a y b para que $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x} = 0$.

Ejercicio 5.9.

Halla a y b para que $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+ax+b}{x^2+3x-10} = \dfrac{15}{7}$.

Actividad con GeoGebra 5.3.

Se considera la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2-ax+a-1}{(x-1)^3}.$$

1. Accede al siguiente enlace y determina, si es posible, un valor de a para el cual
   (a) $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
   (b) $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.
   (c) $\lim_{x\to 1} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$.
   (d) No existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.
2. Para cada uno de los valores de a hallados calcula el límite correspondiente.

5.5 Límites laterales

Ejemplo 5.5.1. Consideremos la función

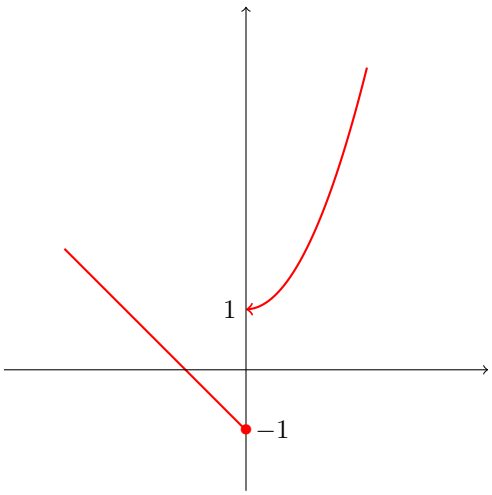
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 0, \\ -x - 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Supongamos que queremos analizar qué ocurre con el $\lim_{x \to 0} f(x)$. En este tipo de casos en los que la función viene dada por dos fórmulas conviene estudiar por separado cómo se comporta la función cuando nos acercamos a 0 por valores menores a 0 y por valores mayores a 0. Se trata de estudiar los denominados límites laterales por izquierda y por derecha, que se denotan $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ respectivamente.

Se tiene:

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x - 1) = -1.$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1.$

Estos dos resultados nos hacen pensar que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. Al observar la gráfica de f (que es conocida), resulta bastante claro este pensamiento.



∇

Teorema 5.5.1. Relación entre el límite común y los límites laterales
Supongamos que f es una función en la que se puede plantear su límite tanto para $x \to a^+$ como para $x \to a^-$. Entonces se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, y solo si,
$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
Un resultado similar es válido si se cambia L por $+\infty$ o por $-\infty$.

Ejemplo 5.5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < 1, \\ x + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Queremos calcular, en caso de que exista, $\lim_{x\to 1} f(x)$. Para esto necesitamos calcular los límites laterales:

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + 3) = 2$.
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$.

Utilizando el teorema 5.5.1 concluimos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. ∇

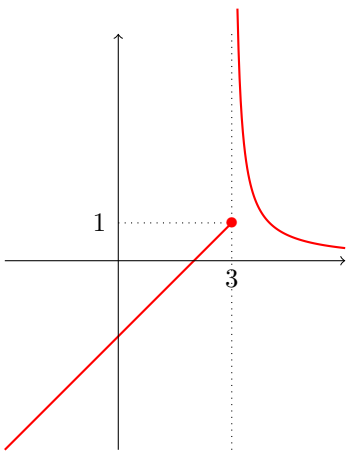
Ejemplo 5.5.3. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 3, \\ \frac{1}{(x-3)} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Queremos calcular, en caso de que exista, $\lim_{x\to 3} f(x)$. Se tiene:

- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x - 2) = 1$.
- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)} = +\infty$.

De lo anterior resulta que $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe. Observemos cómo queda la gráfica de esta función.



Ejercicio 5.10.

Calcula, si existen, los siguientes límites e interpreta gráficamente.

(a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \leq -3, \\ -x - 3 & \text{si } x > -3. \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 1} g(x)$ siendo $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to -2} h(x)$ siendo $h(x) = \begin{cases} |x - 4| & \text{si } x < -2, \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq -2. \end{cases}$

(d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x}{(x-1)^2}$.

(f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{-x+1}{(x^2-4)}$.

Ejercicio 5.11.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x + a}{x^2 - x - 2} & \text{si } x < 2, \\ 4x + b & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Halla a y b reales para que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista. Para los valores de a y b hallados calcula dicho límite.

Actividad con GeoGebra 5.4.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + ax - 6}{x - 1} & \text{si } x > 1, \\ -x^2 + 2x + b & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$

En este enlace puedes encontrar la función f y dos deslizadores: uno naranja para diferentes valores del coeficiente a y otro gris, que da diferentes valores para el coeficiente b.

1. Selecciona el deslizador a y observa el comportamiento de la función para distintos valores de dicho parámetro. Indica un valor de a para el cual
   (a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^2 + ax - 6}{x - 1} = +\infty$.
   (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^2 + ax - 6}{x - 1} = -\infty$.
   (c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^2 + ax - 6}{x - 1} = 8$.
2. Calcula dichos límites y comprueba tus resultados con lo realizado en el apartado anterior.
3. Selecciona el deslizador b y observa el comportamiento de la función para distintos valores seleccionados. Indica un valor de b para el cual $\lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + 2x + b) = 8$.
4. ¿Bajo qué condiciones existe el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?
5. ¿Es suficiente que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ sea finito para que exista el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

5.6 Límites de las funciones potencial, exponencial y logarítmica

En capítulos anteriores introdujimos las funciones potencial, exponencial y logarítmica. Si observamos sus gráficas resulta bastante intuitivo pensar que son válidos los siguientes límites.

- $\lim_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha,\ \forall\ a > 0.$
- $\lim_{x\to a} e^x = e^a,\ \forall\ a \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{x\to a} L(x) = L(a),\ \forall\ a > 0.$
- $\lim_{x\to 0^+} L(x) = -\infty.$

Ejemplo 5.6.1. Aplicando lo anterior obtenemos, a modo de ejemplo, los siguientes límites.

- $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = \lim_{x\to 4} x^{1/2} = 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2.$
- $\lim_{x\to 8} x^\pi = 8^\pi.$
- $\lim_{x\to -3} e^x = e^{-3}.$
- $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$
- $\lim_{x\to 5} L(x) = L(5).$
- $\lim_{x\to 1} L(x) = L(1) = 0.$ ∇

Observación 5.6.1. Sobre los límites de la función potencial
Como habíamos observado en la sección 3.3, hay situaciones en las que la función potencial $f(x) = x^\alpha$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y no solamente para $x > 0$. En esos casos el resultado $\lim_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha$ también es válido para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, el siguiente límite se puede calcular aplicando esta observación.

$$\lim_{x\to -27} \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to -27} x^{1/3} = (-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Para aquellas otras situaciones, en las que la función potencial está definida para $x \geq 0$ y no para $x < 0$, se cumple que $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0^\alpha = 0$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$$

Ejercicio 5.12.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(3x-1)\,(e^x-1)}{x^2+4}.$

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2\,L(x)}{(x-2)^2}.$

(c) $\lim_{x\to 9} (3-\sqrt{x})L(x).$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{L(x)}{x^3}.$

5.7 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 5.13.

Si se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = 7$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces el resultado del $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x).g(x)}{8+g(x)}$ es

1. $\frac{7}{8}$.
2. 0.
3. $-\infty$.
4. $+\infty$.
5. 1.

Ejercicio 5.14.

Si se sabe que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+ax-6}{x^2-2x-3} = b \in \mathbb{R}$ entonces $a+b=$

1. $\frac{5}{4}$.
2. $\frac{9}{4}$.
3. $\frac{3}{2}$.
4. $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 5.15.

Calcula los límites laterales para $x \to 2$ de la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-3x+2)L(x)}{x^2-4} & \text{si } x > 2, \\ \dfrac{x-1}{e^x-e^2} & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Ejercicio 5.16.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x < 0, \\ L(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces

1. si $a > 0$ se cumple $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
2. si $a < 0$ se cumple $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
3. si $a = 0$ se cumple $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
4. si $a > 0$ se cumple $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Ejercicio 5.17.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - a^2} & \text{si } x < 0, \\ L(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces

1. si $a \neq 0$ se cumple $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
2. si $a \neq 0$ se cumple $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
3. si $a = 0$ se cumple $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
4. si $a = 0$ se cumple $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Capítulo 6

Límites para $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$

En capítulos anteriores hemos visto ejemplos de funciones matemáticas que, bajo ciertas hipótesis de trabajo, resultan útiles para modelar la evolución de fenómenos que varían con el tiempo (epidemias, capitales colocados a intereses, tamaños de poblaciones, entre otros). En muchos casos resulta de interés estudiar el comportamiento a muy largo plazo de dichos modelos. Es decir, averiguar cuál será el estado del fenómeno en el futuro, cuando el tiempo transcurrido sea muy grande. Esta idea nos lleva a estudiar, en primera instancia, la noción de límite de una función cuando la variable tiende a $+\infty$.

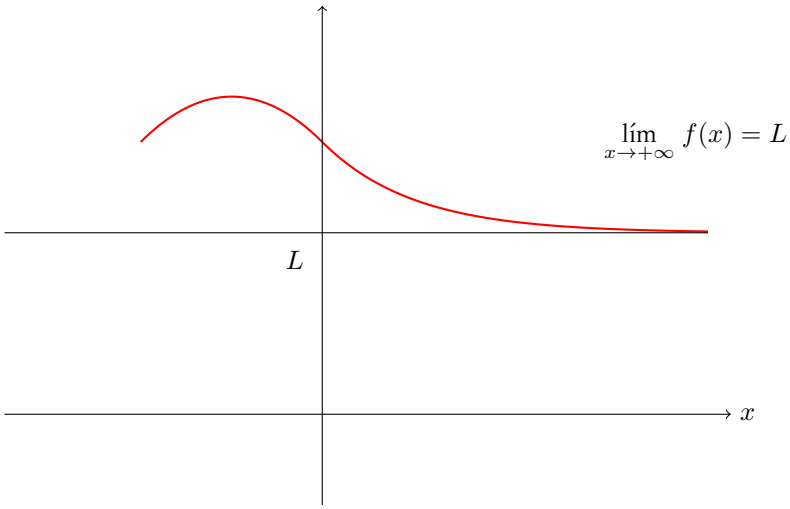
A su vez, con el objetivo de entender el presente, en otros modelos es interesante preguntarnos por su pasado. En este caso nos interesaría el límite de una función cuando la variable tiende a $-\infty$. Al igual que en el caso del límite de una función para $x \to a$, solamente nos aproximaremos al concepto de límite de manera informal, sin llegar a dar una definición rigurosa del mismo.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=CUfjoZprdg4` (Límites 2 parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=QTtfsNS3050` (Límites 2 parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=TmuLpWg6Wtg` (Límites 2 parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=M1RVH2Vwr3o` (Límites 2 parte 4)

6.1 Límites finitos para $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$

En la siguiente gráfica podemos observar que, cuando la variable x toma valores muy grandes, los correspondientes valores funcionales $f(x)$ se acercan indefinidamente al número L.

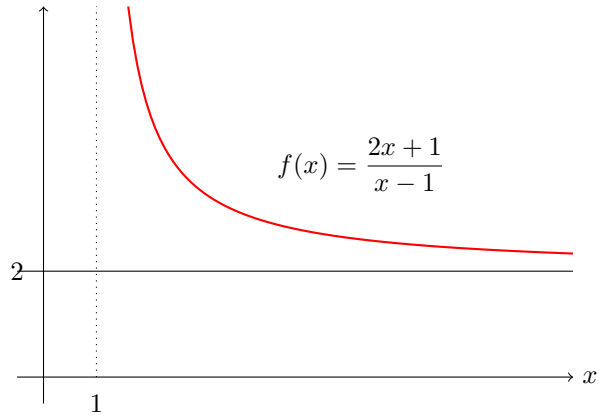


En esas situaciones diremos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Es decir, se dice que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ toma valores tan cercanos a L como se quiera, siempre que x sea suficientemente grande.

Ejemplo 6.1.1. Consideremos la función $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Apliquemos el recurso numérico de calcular valores de x cada vez más grandes, con sus respectivas imágenes $f(x)$, con el objetivo de tener una noción de lo que podría estar sucediendo.

x	$f(x)$
2	5
3	$7/2$
4	3
10	$21/9 \approx 2,33$
20	$41/19 \approx 2,17$
100	$201/99 \approx 2,03$
1000	$2001/999 \approx 2,003$

En principio, parece razonable pensar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Efectivamente, este resultado (que podremos demostrar más adelante), puede visualizarse a partir de la gráfica de f.

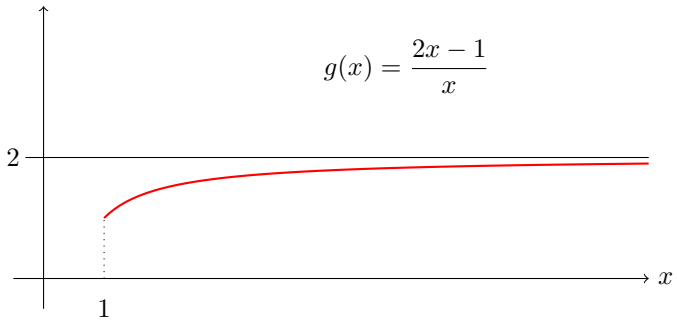


∇

Ejemplo 6.1.2. En el ejemplo 6.1.1, cuando $x \to +\infty$, la función $f(x)$ tiende al número 2 tomando valores mayores que 2. También puede ocurrir que una función tenga límite L tomando valores menores que L.

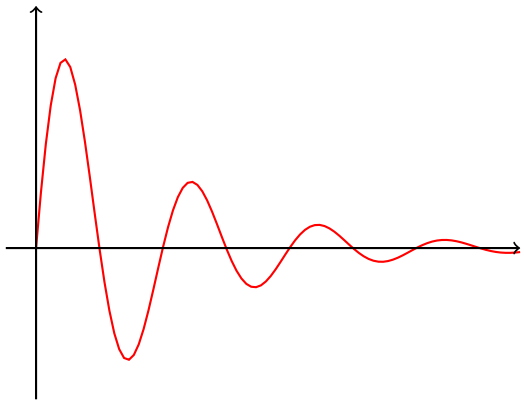
Eso ocurre, por ejemplo, con la función $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \dfrac{2x-1}{x}$. Veamos una tabla con algunos valores funcionales y luego su gráfica.

x	$g(x)$
1	1
2	3/2
4	7/4
10	$19/10 \approx 1,9$
20	$39/20 \approx 1,95$
100	$199/100 \approx 1,99$
1 000	$1\,999/1\,000 \approx 1,999$



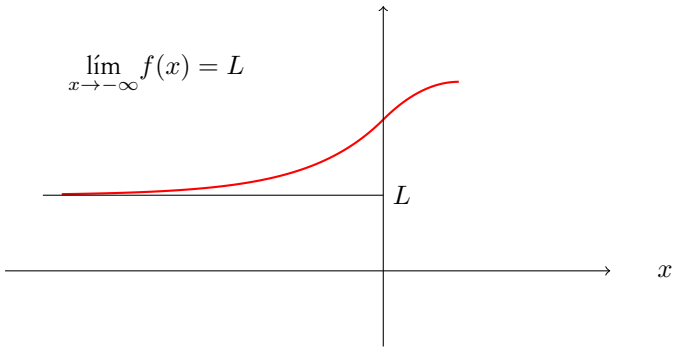
En este caso se cumple que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$, con $g(x) < 2, \forall\, x \geq 1$. ∇

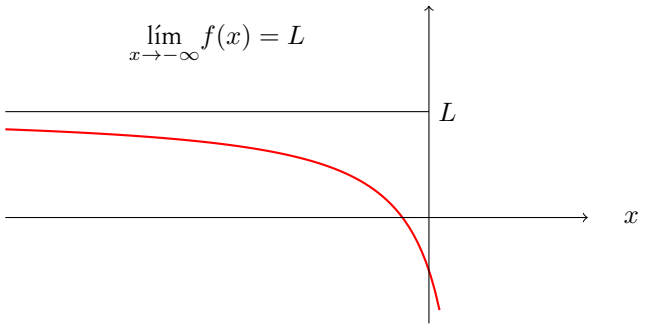
Ejemplo 6.1.3. En la próxima figura se muestra el caso de una función $h(x)$ que cumple $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, pero que no tiene signo constante en ninguna semirrecta derecha.



∇

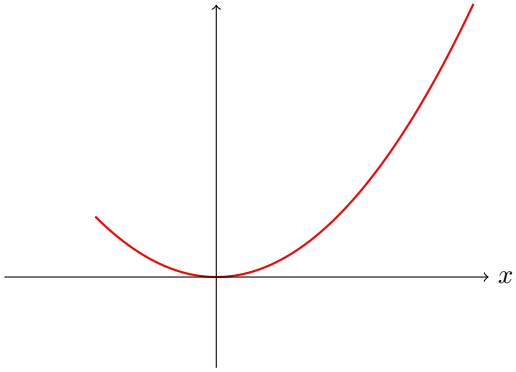
El concepto de límite finito para $x \to -\infty$ es totalmente análogo al caso en que $x \to +\infty$. Veamos gráficamente dos posibles situaciones.





6.2 Límites infinitos para $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$

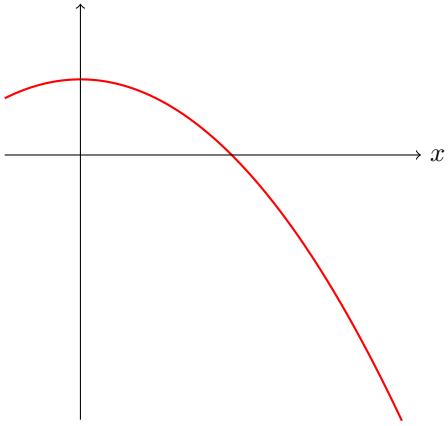
En la próxima figura se nota un comportamiento diferente a los que veníamos observando a medida que x toma valores cada vez más grandes.



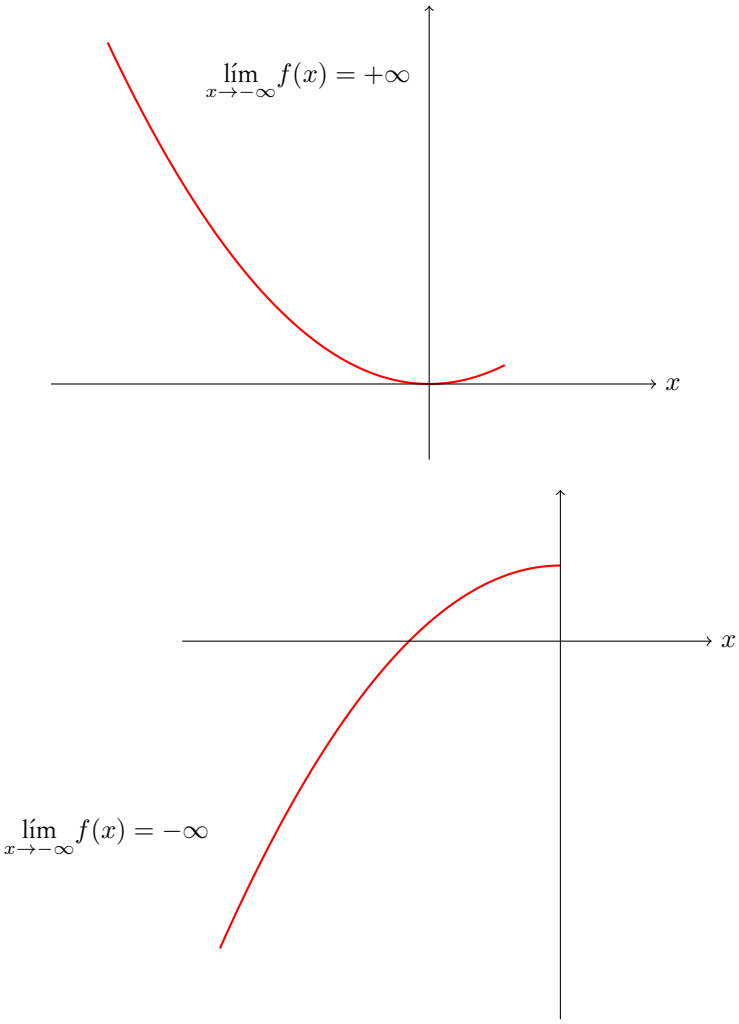
En este caso $f(x)$ toma valores tan grandes como se quiera, siempre que la x sea suficientemente grande. Cuando esto ocurre se dice que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Por otra parte, diremos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ cuando se cumple $\lim_{x\to+\infty} -f(x) = +\infty$. Es decir, cuando establecemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, lo que ocurre es que $f(x)$ toma valores negativos y, en valor absoluto, tan grandes como se quiera, siempre que la x sea suficientemente grande.

Una posible forma de funciones que cumplen que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se observa en la próxima figura.



Veamos gráficamente dos posibles situaciones en que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ respectivamente.



Observación 6.2.1. Operaciones con límites para $x \to \pm\infty$
Para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ valen los mismos resultados que se expresaron en las tablas de operaciones con límites incluidas en el capítulo 5.

Por ejemplo, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -7$, entonces $\lim_{x\to+\infty} (f(x)\, g(x)) = +\infty$. Nuevamente, la dificultad se encuentra en los casos de indeterminación, en los que debemos encontrar algunos métodos adecuados para calcular los límites.

6.3 Límites de las funciones potencial, exponencial y logarítmica para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

Admitiremos los límites de las funciones potencial, exponencial y logarítmica para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ (en caso de que se pueda), resultados que tienen una interpretación geométrica inmediata de acuerdo con sus gráficas.

- Si $\alpha > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha < 0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$.

Observación 6.3.1. Sobre los límites de la función potencial para $x \to -\infty$
Cuando $x \to -\infty$ hay que tener cuidado pues la función potencial podría no estar definida para valores de x negativos, como es el caso de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Aún en el caso en que esté definida, el límite puede dar $+\infty$, $-\infty$ o 0. Observa estas tres situaciones:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

6.4 Funciones equivalentes

El concepto de funciones equivalentes que introducimos en esta sección resulta de utilidad para calcular límites en algunos casos de indeterminación. Vale destacar que los resultados que expondremos no presentan diferencias entre los casos $x \to a$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, por lo cual, en lo que sigue, Δ puede ser un número cualquiera a, $+\infty$ o $-\infty$.

Definición 6.4.1. Funciones equivalentes para $x \longrightarrow \Delta$
Se dice que f y g son **funciones equivalentes** *para $x \to \Delta$ si* $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Para expresar que f y g son funciones equivalentes usaremos la notación $f(x) \sim g(x)$.
Es importante comprender todo lo que abarca la definición de funciones equivalentes. En primera instancia, implica que ambas funciones tienen el mismo límite para $x \to \Delta$. Pero no es solo eso. Además, la definición establece que la evolución de ambas funciones se comporta de manera muy similar cuando $x \to \Delta$.

Ejemplo 6.4.1. Parece razonable conjeturar que la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ es equivalente a la función $g(x) = 3x^2$ cuando $x \to +\infty$. Para demostrarlo debemos plantearnos el límite del cociente de esas funciones y verificar que da 1. Se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 5x + 8}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{3x} + \frac{8}{3x^2}\right) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

∇

Utilizando la misma idea que en la demostración del ejemplo **6.4.1**, se puede establecer un resultado de carácter general.

Teorema 6.4.1. Funciones equivalentes para $x \longrightarrow +\infty$ en caso de suma de funciones potenciales
Si $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots, < \alpha_p$ *y* $a_1, a_2, \ldots a_p$ *son números con* $a_p \neq 0$, *entonces*

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_p x^{\alpha_p} \ \sim \ a_p x^{\alpha_p}$$

para $x \to +\infty$.

Lo que está afirmando el teorema **6.4.1** es que, para $x \to +\infty$, una función que es suma de funciones potenciales es equivalente a la función formada únicamente por el término potencial de mayor exponente.

Ejemplo 6.4.2. Según el teorema **6.4.1** resulta claro que

$$x^{9/2} - 5x^{\pi} - \sqrt{x} \ \sim \ x^{9/2} \ \text{ si } x \to +\infty.$$

∇

Observación 6.4.1. El teorema funciones equivalentes para $x \to -\infty$
El teorema **6.4.1** se cumple también para $x \to -\infty$, siempre que las funciones estén correctamente definidas. Por ejemplo, para $x \to -\infty$ se cumple que $7x^5 - 4x^4 + \sqrt[3]{x} - 9x^2 + x + 1000 \sim 7x^5$.

Teorema 6.4.2. Sustitución por un equivalente en un producto
Si $f(x) \sim g(x)$ *para* $x \to \Delta$ *y existe* $\lim\limits_{x\to\Delta} g(x)\ h(x)$ *entonces se cumple que*

$$\lim_{x\to\Delta} f(x)\ h(x) \ = \ \lim_{x\to\Delta} g(x)\ h(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Al multiplicar y dividir por $g(x)$ obtenemos las siguientes igualdades

$$\lim_{x\to\Delta} f(x)\ h(x) = \lim_{x\to\Delta} \frac{f(x)\ g(x)\ h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f(x)}{g(x)}\ g(x)\ h(x).$$

Como por hipótesis sabemos que $f(x) \sim g(x)$ para $x \to \Delta$, entonces se cumple que $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Luego, los teoremas asociados al límite de un producto nos permiten concluir que $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)}\ g(x)\ h(x) = \lim\limits_{x\to\Delta} g(x)\ h(x)$. $\square$

Observación 6.4.2. Sustitución por un equivalente en un producto
El teorema 6.4.2 nos está diciendo que si en un producto sustituimos un factor por un equivalente, entonces el límite no cambia. Observamos entonces la utilidad que tiene considerar funciones equivalentes cuando tenemos que calcular el límite de un producto de funciones.

Ejemplo 6.4.3. Queremos calcular $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5x+8}{x^3+5x-20}$. Al aplicar el teorema 6.4.1 observamos que el numerador es equivalente a $3x^2$ y el denominador lo es a x^3. Luego, por el teorema 6.4.2, tenemos las siguientes igualdades:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5x+8}{x^3+5x-20} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

∇

Ejercicio 6.1.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2+7x-9}{3x^2+5x+4}$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-5x^2+7x-9}{3x^2+5x+4}$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x-4}{x^4+x^3+4x-2}$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+x-4}{x^4+x^3+4x-2}$.

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^6+5x^3-9}{x^2+1}$.

(f) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^6+5x^3-9}{x^2+1}$.

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{7x^5+5x^2-9x-4}{x^2+x+4}$.

(h) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7x^5+5x^2-9x-4}{x^2+x+4}$.

Actividad con GeoGebra 6.1.

Para realizar esta actividad puedes acceder al siguiente enlace.

Se considera la función $f : A \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{6x^n - 2x + 1}{3x^m + 5x}$, donde $A \subset \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

1. En cada caso indica un valor de m y uno de n para el cual
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$.
2. Repite lo pedido en el apartado anterior varias veces y, a partir de lo realizado, indica qué condiciones deben cumplir m y n para que
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$.
3. En el apartado anterior debes haber observado que es posible obtener diferentes valores de L de acuerdo a m y n. Calcula cada uno de esos límites.
4. Observa que las condiciones de m y n para que el $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sea un número son las mismas que para $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Determina condiciones para m y n de modo que
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Observación 6.4.3. Límites iguales y funciones equivalentes

1. Si dos funciones tienen el mismo límite finito y es diferente de 0 para $x \to \Delta$, entonces son equivalentes para $x \to \Delta$. En efecto, supongamos que $\lim\limits_{x \to \Delta} h(x) = \lim\limits_{x \to \Delta} r(x) = L \in \mathbb{R}$ con $L \neq 0$. Entonces, por el teorema del límite de cociente, tenemos que $\lim\limits_{x \to \Delta} \dfrac{h(x)}{r(x)} = 1$ y, consecuentemente, $h(x) \sim r(x)$ *para* $x \to \Delta$.

2. Sin embargo, si dos funciones tienen límite 0 o $+\infty$ o $-\infty$ para $x \to \Delta$, no tienen por qué ser equivalentes para $x \to \Delta$. Por ejemplo, cuando $x \to +\infty$, entonces la función $f(x) = x^2 \to +\infty$ y la función $g(x) = x^5 \to +\infty$, pero las funciones f y g no son equivalentes cuando $x \to +\infty$ (¿cómo demostrarías esta última afirmación?).

Observación 6.4.4. No hay que entusiasmarse con la sustitución por equivalentes
Hay que tener cuidado, pues en otro tipo de operaciones que no sea un producto (o cociente), no siempre se puede sustituir por equivalentes.

Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x}-(x-5)\right)$. Si sustituyéramos por equivalentes quedaría $\lim_{x\to+\infty}(x-x)=\lim_{x\to+\infty}0=0$. Sin embargo, el límite no da 0, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x}-(x-5)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1-x^2+5x}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x}=8.\end{aligned}$$

Observación 6.4.5. La notación $x\to\pm\infty$
En diversas ocasiones nos interesa calcular el límite de una función $f(x)$ tanto para $x\to+\infty$ como para $x\to-\infty$. Con el único objetivo de abreviar, se suele utilizar la notación $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$.

Es importante destacar entonces que, cuando usamos esta notación, nos estamos refiriendo a dos límites distintos: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

Ejercicio 6.2.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1-\frac{x^2}{x-3}\right)$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5x+7}{x}-(x+4)\right)$.

(c) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+4x}{x+1}-\frac{3x^2-7x}{x-1}\right)$.

(d) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^2+3x}{3x+1}-\frac{4x^2-1}{2x-1}\right)$.

Ejemplo 6.4.4. Veamos cómo procedemos para calcular los límites para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$ de una función definida por más de una fórmula. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+4x & \text{si } x\le 1,\\ \dfrac{x^3-7x+9}{x^4} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Para estudiar el límite cuando $x\to-\infty$ utilizamos la fórmula correspondiente al tramo $x\le 1$. En cambio, para estudiar el límite cuando $x\to+\infty$ utilizamos la fórmula correspondiente al tramo $x>1$:

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3+4x)=\lim_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-7x+9}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. ∇

Ejercicio 6.3.

En cada uno de los siguientes casos calcula $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{5x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 4, \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 4. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 9x - 5}{x^3} & \text{si } x \leq -1, \\ e^x & \text{si } x > -1. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x^5 - 2x^3 + x - 7}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0, \\ L(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

6.5 Órdenes de infinitos

Supongamos que las funciones f y g cumplen $\lim_{x\to\Delta} f(x) = \lim_{x\to\Delta} g(x) = +\infty$. Si bien ambas funciones tienen límite $+\infty$ para $x \to \Delta$, puede interesarnos determinar si alguna de ellas tiende a $+\infty$ más rápidamente que la otra. Para compararlas, resulta razonable considerar el $\lim_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Imaginemos el caso en que este límite sea $\lim_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Esto indicaría que $f(x)$ es considerablemente mayor que $g(x)$ cuando x se aproxima suficientemente a Δ; es decir, que $f(x)$ tiende a $+\infty$ más rápidamente que $g(x)$. Para precisar esta idea, es necesario introducir la definición de órdenes de infinitos.

Definición 6.5.1. Órdenes de infinitos

Sean f y g dos funciones que tienen límite $+\infty$ o $-\infty$ para $x \to \Delta$. Se dice que

- $ord(f) > ord(g)$ *si se cumple que* $\lim_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.
- $ord(f) < ord(g)$ *si se cumple que* $\lim_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $ord(f) = ord(g)$ *si se cumple que* $\lim_{x\to\Delta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$ *con* $L \neq 0$.

Ejemplo 6.5.1. Aplicando la definición obtenemos

1. x^5 es de mayor orden que x^2 para $x \to +\infty$
   debido a que se cumple $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.
2. x^5 también es de mayor orden que x^2 para $x \to -\infty$
   debido a que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^5}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

3. Para $x \to 0^+$, ¿cuál es de mayor orden? ¿$\dfrac{1}{x}$ o $\dfrac{1}{x^3}$? Para averiguarlo nos planteamos el límite del cociente de ambas funciones:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\,\frac{x^3}{1} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

De lo anterior resulta que

$$ord\left(\frac{1}{x^3}\right) > ord\left(\frac{1}{x}\right)$$

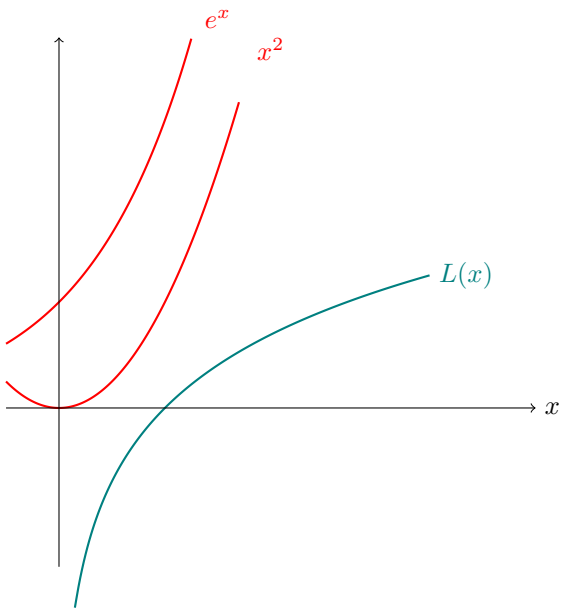
para $x \to 0^+$. ∇

Infinitos principales para $x \to +\infty$

Nos concentramos en el caso en que $x \to +\infty$. En los capítulos anteriores hemos visto muchas funciones que tienen límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$. Entre ellas se encuentran las tres siguientes funciones.

- Infinito logarítmico: $(L\,x)^p$ con $p > 0$.
- Infinito potencial: x^α con $\alpha > 0$.
- Infinito exponencial: b^x con $b > 1$.

Observemos las gráficas de algunos casos particulares de estas funciones.



Es claro que en muchos modelos económicos en los que la variable representa el tiempo, pueden aparecer involucradas varias clases de estas funciones. Para analizar el comportamiento del modelo cuando el tiempo crece cada vez más, resulta de importante conocer cuál de estas funciones presenta mayor orden. El próximo teorema cumple con dicho objetivo.

Teorema 6.5.1. Comparación de los órdenes de los infinitos principales para $x \to +\infty$
Si $p > 0$, $\alpha > 0$ y $b > 1$, entonces se cumple que

$$ord\,(L\,x)^p \;<\; ord\,x^\alpha \;<\; ord\,b^x$$

Como caso particular se tiene que, si $\alpha > 0$ y $k > 0$, entonces s cumple que

$$ord\,L(x) \;<\; ord\,x^\alpha \;<\; ord\,e^{kx}$$

Ejemplo 6.5.2. Utilizando el teorema 6.5.1 y la definición de órdenes de infinitos obtenemos los resultados de los siguientes límites

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{Lx}{x} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{(Lx)^5}{x} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5}{e^x} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{Lx} = +\infty.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{7Lx} = +\infty.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100}}{e^{2x}} = 0.$ ∇

El próximo teorema nos permite calcular el límite de la función suma en el caso en que los sumandos presentan órdenes diferentes.

Teorema 6.5.2. El equivalente de una suma de infinitos de distinto orden
Sean f y g dos funciones con límite $+\infty$ o $-\infty$ para $x \to \Delta$. Si $ord(f) > ord(g)$, entonces $(f \pm g) \sim f$ para $x \to \Delta$. Es decir, una suma o resta de infinitos de distinto orden es equivalente al de mayor orden.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que $(f \pm g) \sim f$ debemos plantearnos el límite del cociente y verificar que es 1. Por las hipótesis del teorema, se cumple $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Tenemos entonces que

$$\lim_{x\to\Delta} \frac{f(x) \pm g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\Delta} \left(1 \pm \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1 + 0 = 1.$$

□

Ejemplo 6.5.3. Aplicando los teoremas 6.5.2 y 6.5.1 obtenemos los siguientes resultados

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5 + (Lx)^4}{x^9 - 7x^3 + e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5}{e^x} = 0.$

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x+Lx} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x} = 5-$
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+6x^7+9}{5x^4+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$ ∇

Ejercicio 6.4.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2-3x}{x^2-L|x|}$.

(b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x}-3x^4+5L(x)}{x^2-e^x}$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}+2}$.

(d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+1}$.

(e) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\sqrt[3]{x}-7x+5e^x}{x^2-e^{2x}}-$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\,e^x}{e^x+x^2}$.

Ejercicio 6.5.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} x\,e^{-x}$. (b) $\lim_{x\to\pm\infty} x^2\,e^{-x}$. (c) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\,e^{-x}$ $(\alpha>0)$.

Ejercicio 6.6.

Calcula $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ para la función

$$f(x)=\begin{cases} x\,L|x| & \text{si } x<0,\\ \dfrac{5x^2-4L(x+1)+x^3}{e^{3x}} & \text{si } x\geq 0,\end{cases}$$

Ejercicio 6.7.

Halla los valores de a y b sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{ae^x+bx^2-Lx}{3x^2+Lx}=1.$

Actividad con GeoGebra 6.2.

Se consideran los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-1}{2x^2+x+2}\cdot a(x) = -3.$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x+1}{b(x)} = -2.$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{c(x)}{2x+5} = 1.$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+4x}{5x+L(x)}\cdot d(x) = 0^-.$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-e^x+4x}{(7x+e^x)\cdot w(x)} = -\infty.$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-7x^2+L(x+1)+3x}{L(x)-3x^2+x+1}\cdot z(x) = -\infty.$

Con este enlace accedes a las gráficas de las funciones $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $w(x)$ y $z(x)$. Puedes activar los gráficos de las funciones cliqueando en las casillas de control de t_1, t_2, etc. A su vez, se ha incluido por claridad la gráfica punteada de la recta $y=-1$. Se pide que asocies cada una de ellas con su gráfica y que verifiques si lo obtenido es coherente con el valor de los límites dados en la letra.

En los próximos dos ejemplos se muestra cómo, en algunas ocasiones, es posible utilizar órdenes de infinitos aun cuando la variable original no tienda a $+\infty$.

Ejemplo 6.5.4. Queremos calcular $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x$. Se trata de una indeterminación debido a que el primer factor tiende a $-\infty$ y el segundo a 0. Si realizamos el cambio de variable $z=-x$ obtenemos que esta nueva variable z tiende a $+\infty$. Se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim_{z\to+\infty} -z\,e^{-z} = \lim_{z\to+\infty} -z\,\frac{1}{e^z} = \lim_{z\to+\infty} -\frac{z}{e^z}.$$

Ahora sí podemos aplicar el teorema 6.5.1 sobre órdenes de infinitos. Como z tiende a $+\infty$, el numerador z es un infinito de tipo potencial y el denominador e^z es de tipo exponencial. Obtenemos que la función que se encuentra en el denominador es de mayor orden, por lo cual el límite es 0. ∇

Ejemplo 6.5.5. Queremos calcular $\lim_{x\to0^+} x\,L(x)$. Se trata de una indeterminación debido a que el primer factor tiende a 0 y el segundo a $-\infty$. Como en el caso anterior, intentamos definir una variable que tienda a $+\infty$. En este caso, proponemos el cambio de variable $z=\dfrac{1}{x}$. Esta nueva variable z tiende a $+\infty$.

Al hacer el cambio de variable debemos sustituir la x por $\dfrac{1}{z}$. Se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,L(x) = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z}\,L\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z}\,(-L(z)) = \lim_{z\to+\infty} -\frac{L(z)}{z} = 0.$$

En el último paso, para obtener como resultado del límite el número 0, se utilizó la comparación de órdenes de infinitos para $z \to +\infty$, entre $L(z)$ (de tipo logarítmico) y z (de tipo potencial). ∇

Ejercicio 6.8.

Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^2\,L(x)$.

(b) $\lim_{x\to 0^+} x\,e^{1/x}$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}}$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{e^{-x}}$.

6.6 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 6.9.

Si $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{ae^x + be^{-x}}{x^3 + e^x} = +\infty$ entonces necesariamente

1. $a = 1$ y $b = 0$.
2. $a = 0$ y $b = 0$.
3. a cualquiera y $b < 0$.
4. $a = 0$ y b cualquiera.

Ejercicio 6.10.

Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(a-1)e^x + bx^3}{x^3 + 1} = 8$ entonces necesariamente

1. $a = 1$ y $b = 8$.
2. $a = 1$ y $b = 7$.
3. a cualquiera y $b = 8$.
4. $a = 9$ y b cualquiera.

Ejercicio 6.11.

Si $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x + ax^2 + bx^3}{e^x + x^2 - 5x + 1} = 4$ entonces necesariamente

1. a cualquiera y $b = 4$.
2. $a = 4$ y b cualquiera.
3. $a = 0$ y $b = 0$.
4. $a = 4$ y $b = 0$.

Capítulo 7
Continuidad

En la sección 3.6 presentamos de manera muy general el mecanismo del IRPF aplicado a los ingresos. Observamos que se trata de un impuesto progresivo y que cada tasa porcentual se aplica solamente al monto del ingreso que cae en la franja correspondiente. Como consecuencia, la gráfica de la función que determina el monto del impuesto en función del ingreso resulta ser una curva continua.

Sin embargo, el denominado IRPF a los alquileres se aplica de manera diferente. Si una persona propietaria cobra menos de 40 BPC —base de prestaciones y contribuciones— al año por concepto de alquiler, no paga impuesto. En cambio, si cobra más de 40 BPC, debe pagar un $10,5\,\%$ del total del alquiler. De esta manera se produce una especie de salto o discontinuidad en la función que determina el monto del IRPF que debe pagarse por alquileres.

Cuando se dice que una función es continua pensamos inmediatamente en una función cuya gráfica no presenta interrupciones, que no se rompe ni tiene saltos ni huecos. Por ejemplo, las funciones lineales, las cuadráticas y la exponencial son continuas en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, también nos hemos encontrado con varios ejemplos de funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ cuyas gráficas presentan saltos en algunos puntos de su dominio. En este capítulo estudiaremos de forma precisa la noción de continuidad, así como las propiedades de las funciones que tienen esa característica.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=T_wkqs29TdA&t=184s` (Continuidad parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=aCT6tF626XA` (Continuidad parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=TWAW93Z16sM` (Continuidad parte 3)

7.1 Continuidad de una función en un punto

Definición 7.1.1. Función continua en un punto
Se dice que una función f es **continua** *en el punto a si se cumple que*

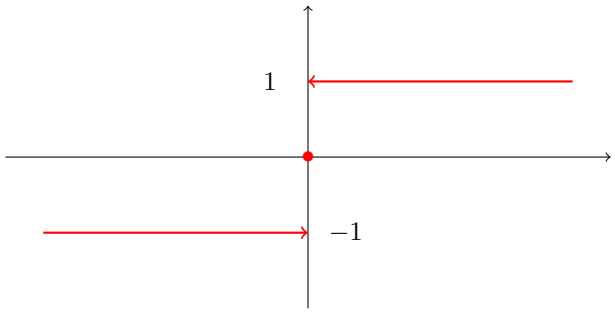
$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a).$$

Si recordamos el teorema 5.5.1 y lo aplicamos en la definición 7.1.1, obtenemos la siguiente equivalencia

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Ejemplo 7.1.1. Consideremos la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Esta función suele denominarse función signo. Su gráfica es la siguiente:



¿Es esta función continua? Es obvio que la respuesta es no, ya que su gráfica presenta un salto notorio. Esta interrupción puede observarse desde el punto de vista analítico, ya que los límites laterales son diferentes: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Dado que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, podemos deducir que la función f no es continua en el punto 0.

Sin embargo, debemos ser un poco más cuidadosos en las consideraciones que estamos haciendo. En efecto, el salto ocurre en el punto de abscisa 0 y no en otros puntos. Mejoramos entonces la conclusión si respondemos que f no es continua en 0, aunque sí es continua en el resto de los puntos del dominio. ∇

Ejemplo 7.1.2. Consideremos la función f definida por

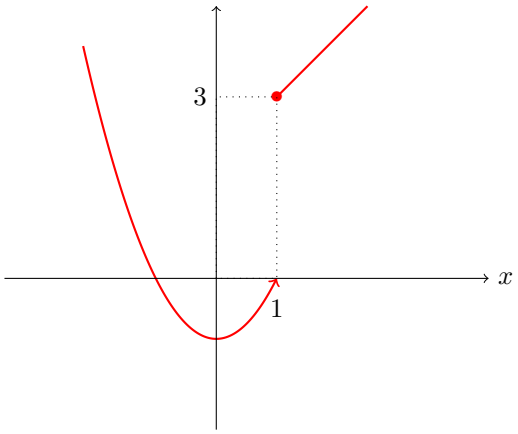
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1, \\ x + 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad en $x = 1$ debemos calcular los límites laterales en el punto en cuestión.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x + 2) = 3.$$

Como ambos límites laterales son diferentes, resulta que no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ y, por lo tanto, f no es continua en 1. Es importante resaltar que la definición de continuidad sí se cumple para todos los demás puntos del dominio de la función. Es decir, f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$.



∇

Observación 7.1.1. Funciones continuas en todo punto de su dominio
De los resultados conocidos sobre límites podemos asegurar que las funciones polinómicas, la exponencial (e^x), la logarítmica ($L(x)$) y la potencial (x^α, con $\alpha > 0$) son funciones continuas en todo punto de sus dominios. Sin embargo debemos tener presente que la continuidad y la existencia son conceptos diferentes. Esta situación queda expuesta en el ejemplo 7.1.1 y en el ejemplo 7.1.2, en los que las funciones existen en todo $\mathbb{R}$, pero son discontinuas en los puntos 0 y 1 respectivamente.

Teorema 7.1.1. Operaciones con funciones continuas
Sean f y g dos funciones continuas en el punto a. Entonces se cumple que

1. *$f+g$ es continua en a.*
2. *$f-g$ es continua en a.*
3. *$f\,g$ es continua en a.*
4. *f/g es continua en a, siempre que $g(a)\neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. A continuación hacemos la demostración para el caso de la suma; los otros casos son análogos. La demostración se reduce a aplicar la definición y los teoremas ya conocidos sobre límites.

Por hipótesis, sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Por el teorema del límite de una suma, obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = f(a)+g(a) = (f+g)(a),$$

Así, queda demostrado que $(f+g)$ es continua en a. □

Ejemplo 7.1.3. Consideremos la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \dfrac{L(x)}{x-3}$, donde A es su dominio más amplio posible. En primer lugar, observamos que

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \text{ y } x \neq 3\}.$$

Si nos preguntamos en qué puntos es continua la función podemos asegurar que F es continua en todo su dominio por tratarse de un cociente de funciones continuas y no anularse nunca el denominador en A. ∇

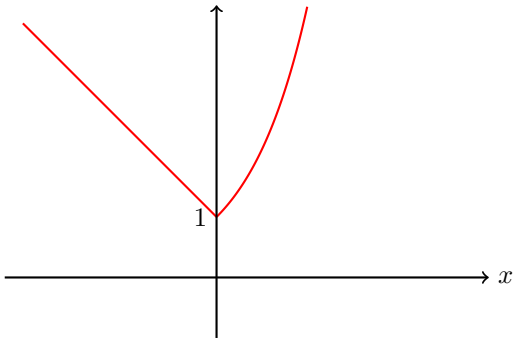
Ejemplo 7.1.4. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x+\lambda & \text{si } x < 0, \\ e^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En todos los puntos diferentes de 0 la función es continua, por ser una función lineal en los valores negativos y ser función exponencial en los valores positivos. Para estudiar la continuidad en 0 calculamos los límites laterales de la función y el valor de la función en $x = 0$:

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x+\lambda) = \lambda$,
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$,
- $f(0) = e^0 = 1$.

Concluimos que f es continua en 0 si, y solo si, $\lambda = 1$. Para ese valor la gráfica queda así:



∇

Ejercicio 7.1.

Investiga en qué puntos son continuas las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ -x+1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-3)^2} & \text{si } x \neq 3, \\ 5 & \text{si } x = 3. \end{cases}$

(d) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2, \\ 4 + L(x-1) & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

Ejercicio 7.2.

Discute, según $\lambda \in \mathbb{R}$, en qué puntos es continua la función

$$f(x) = \begin{cases} x + \lambda & \text{si } x \leq 2, \\ \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + x - 6} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Ejercicio 7.3.

Se considera la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0, \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Encuentra los valores a y b sabiendo que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

El teorema 7.1.2 establece que la característica de continuidad también se preserva mediante composición de funciones continuas.

Teorema 7.1.2. Continuidad de la función compuesta
Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones tales que f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a) \in B$. Entonces la función $g \circ f$ es continua en a.

Ejemplo 7.1.5. Consideremos la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{x^3}$. Observamos que la función h coincide con la composición de las funciones g con f, donde

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = e^x \quad \text{y} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3.$$

Como f es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y g también es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, se deduce que la función h es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, por ser una composición de funciones continuas. ∇

Ejercicio 7.4.

Investiga en qué puntos son continuas las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} L(1-x) & \text{si } x < 1, \\ e^{4x-x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x < 3, \\ x^2 + e^{x-3} - 4 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$

(d) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2+12}{x^2+x-2} & \text{si } x < -2, \\ ax + 2 & \text{si } x \geq -2. \end{cases}$

Actividad con GeoGebra 7.1.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x - 1} & \text{si } x < 1, \\ a & \text{si } x = 1, \\ b + L(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

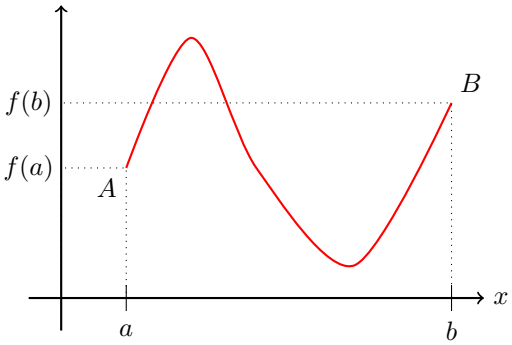
1. Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}$ discutiendo según a y b.
2. Aquí puedes encontrar un punto P cuya abscisa es 1, y dos deslizadores que te permitirán observar el comportamiento del gráfico de esta función según a y b. Selecciona diferentes valores para estos deslizadores y posiciones del punto P, con el objetivo de
   (a) hallar un valor de a y de b para que no exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$. ¿Para qué valores de a y de b el $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe?
   (b) hallar un valor de a, b y c para que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$, pero que f no sea continua en $x = 1$.
   (c) ¿Para qué valores de a y b resulta ser f es continua en 1?

7.2 Propiedades de las funciones continuas en $[a, b]$

Definición 7.2.1. Función continua en el intervalo $[a, b]$.
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$. Se dice que f es **continua en** *$[a, b]$ cuando se cumplen las tres siguientes condiciones:*

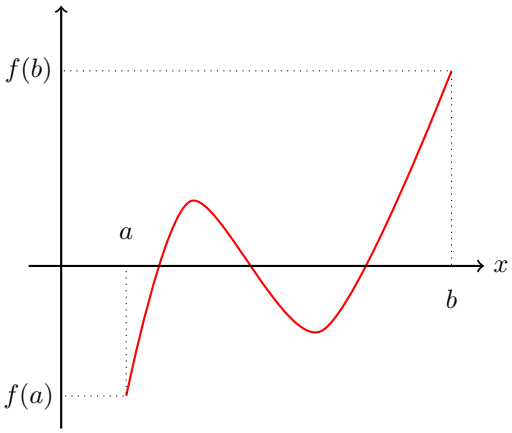
- *para cada $p \in (a, b)$, f es continua en p; o sea que: $\lim_{x \to p} f(x) = f(p), \ \forall\, p \in (a, b)$.*
- *f es **continua por derecha** en a; o sea que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.*
- *f es **continua por izquierda** en b; o sea que $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.*

La gráfica de una función continua en $[a, b]$ es una curva que, sin presentar saltos, une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$.



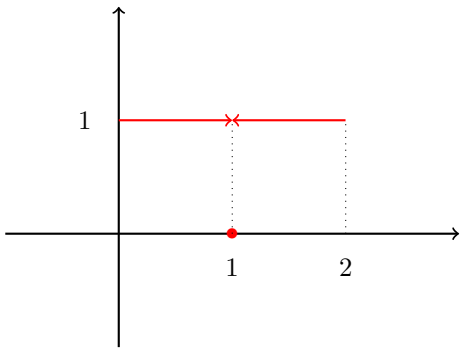
A continuación presentamos el enunciado de tres teoremas que son muy importantes para el desarrollo de las funciones continuas en intervalos cerrados.

Teorema 7.2.1. Teorema de Bolzano
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Observación 7.2.1. Observaciones sobre el teorema de Bolzano

1. Lo que afirma el teorema es que si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos una raíz de la función f en el intervalo (a, b).
2. Hay que tener en cuenta que el teorema no afirma nada sobre la cantidad de raíces. La función puede tener más de una raíz e incluso infinitas.
3. El recíproco del teorema es falso. En efecto, la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ si $x \neq 1$, y $f(1) = 0$, tiene una raíz en dicho intervalo (que es $x = 1$), pero no es continua en $[0, 2]$, ni cumple que $f(0)f(2) < 0$.



   Resulta entonces que las hipótesis del teorema de Bolzano son condiciones suficientes pero no necesarias para la existencia de raíces.
4. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, pero f no es continua en $[a, b]$, no es posible asegurar que la función tenga al menos una raíz.

Ejercicio 7.5.

Encuentra un ejemplo de una función f definida en el intervalo $[0, 1]$ tal que $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, f sea continua en todos los puntos del intervalo abierto $(0, 1)$, f no sea continua en $[0, 1]$ y que f no tenga raíces en el intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 7.2.1. Queremos demostrar que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ tiene raíces en el intervalo $[0, 1]$. En primera instancia, es importante observar si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo. En caso afirmativo, ya tenemos demostrado lo que queríamos.

- f es obviamente continua en $[0, 1]$ por ser un polinomio.
- $f(0) = -1$ y $f(1) = 3$.

El teorema de Bolzano nos permite afirmar entonces que f tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Importa destacar que, si bien podemos afirmar que existe una raíz en el intervalo, el teorema no nos brinda una manera de calcularla. ∇

Ejercicio 7.6.

Se considera $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 7x^2 + x + 3$. Demuestra que f tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 7.7.

Se considera $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-x} + 1 - x$. Demuestra que f tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 2)$.

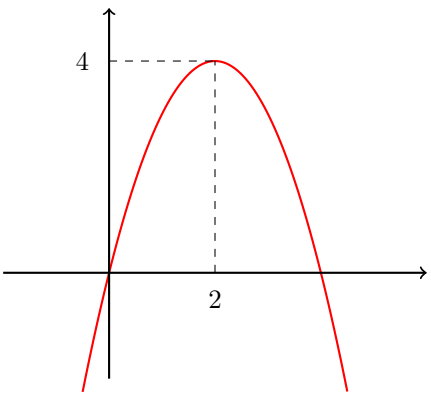
En los primeros capítulos del libro ya hemos trabajado con la noción de máximo y de mínimo absolutos de una función. En esta sección presentamos sus definiciones precisas.

Definición 7.2.2. Máximo y mínimo absolutos de una función
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto $I \subset \mathbb{R}$. Un número $M \in \mathbb{R}$ es el **máximo absoluto** *de f en I si cumplen las siguientes condiciones:*

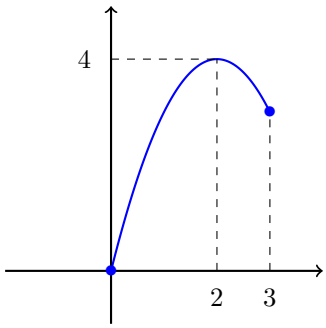
- $M \geq f(x)$, $\forall\, x \in I$
- *Existe algún $p \in I$ tal que $M = f(p)$*

Es decir, M es el máximo de f en I si cumple que M es imagen de algún punto del conjunto I y además es la mayor de todas las imágenes de los puntos de I. Dicho de otra forma, M es el máximo del conjunto $f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}$. La definición de **mínimo absoluto** es análoga y esperamos que puedas escribirla sin inconvenientes. Cuando hablemos de extremos absolutos nos estaremos refiriendo al máximo y al mínimo absoluto.

Ejemplo 7.2.2. Consideremos la función $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 4x$. El objetivo de este ejemplo es comenzar a entender que los valores máximo y mínimo absolutos de una función se encuentran relacionados con la estructura del dominio I de la función.
Primer caso: $I = \mathbb{R}$. Por la forma de la parábola, resulta claro que el máximo absoluto de $f(x) = -x^2 + 4x$ en $\mathbb{R}$ vale 4 y que esta función no tiene mínimo absoluto en todo $\mathbb{R}$.

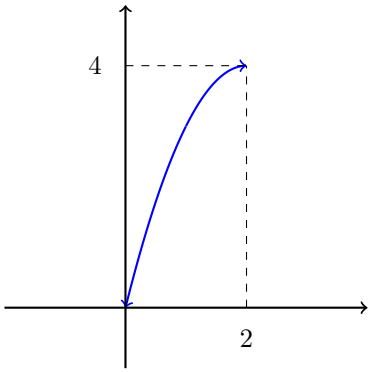


Segundo caso: $I = [0, 3]$. La gráfica de la restricción de f al intervalo $I = [0, 3]$ (en azul) queda:



La respuesta cambia. Si bien el máximo absoluto continúa siendo el valor $f(2) = 4$, ahora, en el intervalo $[0, 3]$, esta función tiene mínimo absoluto, que es $f(0) = 0$.

Tercer caso: $I = (0, 2)$. La gráfica de la restricción de f al intervalo $I = (0, 2)$ (en rojo) queda:



En esta situación no existe ningún $p \in (0, 2)$ tal que $f(p) \geq f(x)\ \forall\ x \in (0, 2)$. Entonces concluimos que la función f no tiene máximo absoluto en $(0, 2)$. Aplicando un razonamiento análogo deducimos que f tampoco tiene mínimo absoluto en $(0, 2)$. ∇

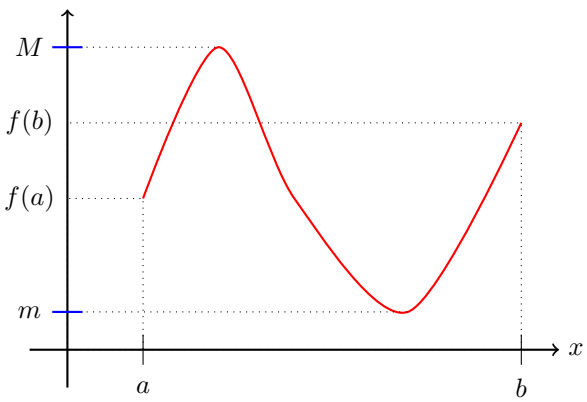
Ejemplo 7.2.3. Consideremos la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ entonces f no tiene máximo absoluto en $(0, +\infty)$.
Por otra parte, como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$, tampoco tiene mínimo en $(0, +\infty)$. ∇

Los ejemplos 7.2.2 y 7.2.3 muestran que, aunque la función sea continua, la existencia de extremos absolutos depende de las características del conjunto I donde estemos trabajando. De todos modos, parece muy razonable pensar que si estamos en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y la función es continua en $[a, b]$, entonces la función deberá tener máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$. Eso es precisamente lo que afirma el siguiente teorema.

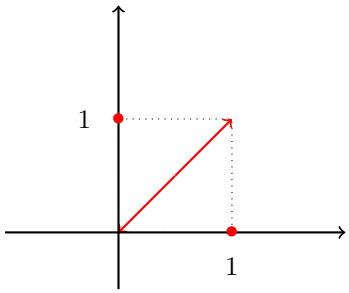
Teorema 7.2.2. Teorema de Weierstrass
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$.



Observación 7.2.2. Observaciones sobre el teorema de Weierstrass

1. La continuidad de la función f en $[a, b]$ es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de extremos absolutos. En otras palabras, el recíproco del teorema de Weierstrass no es válido. Un contraejemplo para el recíproco es la función

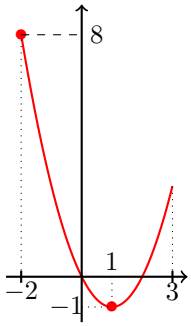
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ x & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



   Esta función tiene máximo y mínimo absolutos en $[0, 1]$ (que valen 1 y 0, respectivamente), pero la función f no es continua en $[0, 1]$.

2. Si la función no es continua en $[a, b]$, no puede asegurarse nada. Pueden existir, o no, extremos absolutos.

Ejemplo 7.2.4. Queremos hallar los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 2x$ en $[-2, 3]$. Como f es continua en $[-2, 3]$, el teorema de Weierstrass nos permite afirmar que existen máximo y mínimo absolutos de f en $[-2, 3]$. Ahora bien, ¿cómo los encontramos? Una posibilidad es graficar.



La gráfica de f es un tramo de parábola cuyo vértice tiene abscisa 1. Como la concavidad de esta es positiva, resulta claro que el mínimo absoluto en el intervalo $[-2, 3]$ es la ordenada del vértice, o sea $f(1) = -1$. Según la forma de la gráfica, resulta evidente afirmar que el máximo absoluto se alcanzará en $x = -2$ o en $x = 3$. Concretamente, será el mayor valor entre $f(-2)$ y $f(3)$. Como $f(-2) = 8$ y $f(3) = 3$, podemos concluir que el máximo absoluto de f en $[-2, 3]$ es 8. ∇

Ejercicio 7.8.

Halla el máximo y el mínimo absolutos (en caso de que existan), de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

(a) $f(x) = -x^2 + 6x$ en $[0, 6]$.

(b) $f(x) = -x^2 + 6x$ en $[-1, 3]$.

(c) $f(x) = x - 2$ en $[1, 4]$.

(d) $f(x) = x - 2$ en $[1, 4)$.

(e) $f(x) = -2x + 4$ en $[0, 3]$.

(f) $f(x) = -x + 4$ en $(0, 3)$.

(g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \in [-2, 0], \\ -x + 1 & \text{si } x \in (0, 3]. \end{cases}$

Actividad con GeoGebra 7.2.

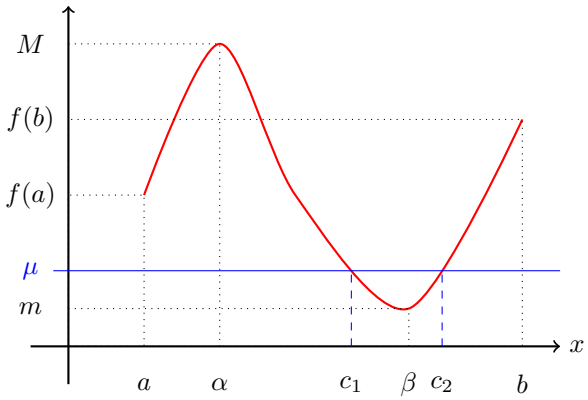


1. Sea f una función continua en el $[0, 3]$. Accediendo a este enlace y empleando los deslizadores a y b, determina en cada caso un valor de cada uno para que
   (a) f cumpla la hipótesis del teorema de Bolzano en el $[0, 3]$.
   (b) f cumpla la tesis pero no la hipótesis del teorema de Bolzano en el $[0, 3]$.
   (c) no se cumplan ni la hipótesis ni la tesis del teorema de Bolzano en el $[0, 3]$ para f.
   (d) f cumpla la hipótesis del teorema de Bolzano en el $[0, 3]$ y tenga más de una raíz en el intervalo $(0, 3)$.
2. ¿Para qué valores de a y de b tiene f máximo y mínimo absolutos en el $[0, 3]$? ¿Por qué?

El próximo teorema es una generalización del teorema de Bolzano.

Teorema 7.2.3. Teorema de Darboux

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, M el máximo absoluto de f en $[a,b]$ y m el mínimo absoluto de f en $[a,b]$. Entonces se cumple que todo punto del intervalo $[m,M]$ tiene preimagen, es decir: para cada $\mu \in [m,M]$ existe al menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \mu$.



DEMOSTRACIÓN. Como M y m son el máximo y el mínimo de f en $[a,b]$, entonces existen $\alpha,\ \beta \in [a,b]$ tales que $M = f(\alpha)$ y $m = f(\beta)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha < \beta$. Consideremos la función auxiliar $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \mu$.

Observemos que esta nueva función cumple tres propiedades:

- g es continua en $[\alpha,\beta]$ por ser resta de funciones continuas en $[\alpha,\beta]$.
- $g(\alpha) = f(\alpha) - \mu = M - \mu > 0$.
- $g(\beta) = f(\beta) - \mu = m - \mu < 0$.

Resulta entonces que g cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[\alpha,\beta]$. Por lo tanto, podemos afirmar que existe al menos un punto $c \in [\alpha,\beta]$ tal que $g(c) = 0$. Por la definición de la función g sabemos que $g(c) = f(c) - \mu$, de donde resulta que $f(c) = \mu$. Con esto finaliza la demostración del teorema porque se demostró que existe al menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \mu$. □

Ejercicio 7.9.

Sea f una función continua en $[0,1]$ tal que $f(x) \in [0,1],\ \forall\ x \in [0,1]$. En estas condiciones te pedimos que demuestres que f tiene algún punto fijo en el intervalo $[0,1]$, es decir, que existe al menos un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia. *Te sugerimos que intentes aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x - f(x)$.*

7.3 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 7.10.

Sea $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } |x| > 4, \\ x^2 - 10 & \text{si } |x| \leq 4. \end{cases}$

Se consideran las afirmaciones:

(I) f es continua en -4, (II) f es continua en 4, (III) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Entonces

1. solo la (I) y la (III) son verdaderas.
2. solo la (I) es verdadera.
3. solo la (I) y la (II) son verdaderas.
4. las tres afirmaciones son falsas.

Ejercicio 7.11.

Sea $f(x) = \begin{cases} L(2-x) - 3x + 5e^{x-1} & \text{si } \leq 1, \\ \dfrac{x^2 + ax + b}{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Si f es continua en 1, entonces $a + b =$

1. -1.
2. 0.
3. 1.
4. 2.

Ejercicio 7.12.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2, \\ x - 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$ Se consideran las afirmaciones:

(I) $(f \circ f)(2) = 2$, (II) f cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en $[0, 5]$, (III) f cumple la tesis del teorema de Bolzano en $[0, 5]$.

Entonces

1. solo la (I) y la (III) son verdaderas.
2. solo la (I) es verdadera.
3. solo la (II) y la (III) son verdaderas.
4. las tres afirmaciones son falsas.

7.4 Anexo sobre la completitud del conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$

Cotas, supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Recordemos los siguientes conceptos y sus relaciones.

1. Se dice que $k \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si $k \geq a,\ \forall\, a \in A$. Si A tiene alguna cota superior, entonces se dice que es un conjunto acotado superiormente. Es claro que si un conjunto está acotado superiormente entonces tiene infinitas cotas superiores, ya que todo número mayor que una cota superior también es cota superior. Por ejemplo, si $A = (0, 4)$ entonces el conjunto formado por todas las cotas superiores de A es $[4, +\infty)$.
2. Un número real M es el máximo de A si es cota superior de A y además pertenece a dicho conjunto. Por ejemplo, el valor 4 es el máximo del intervalo cerrado $[0, 4]$. Sin embargo, si consideramos el intervalo abierto $(0, 4)$ podemos afirmar que no tiene máximo.
3. El supremo de A (también llamado extremo superior, y que será indicado con $sup(A)$) es la menor de las cotas superiores de A. O sea, el número L es el supremo de A si, y solo si, verifica estas dos condiciones:
   - $L \geq a,\ \forall\, a \in A$ (L es cota superior de A).
   - Si L' es una cota superior cualquiera de A, entonces $L \leq L'$ (no hay ninguna cota superior de A menor que L).

   Por ejemplo, el supremo del intervalo $(0, 4)$ es el número 4. Es así que el supremo de un conjunto (en caso de existir) no tiene por qué pertenecer al conjunto.
4. De los dos puntos anteriores podemos identificar que existe una relación entre ambas definiciones. Un conjunto acotado superiormente tiene máximo si, y solo si, su supremo pertenece a dicho conjunto. Por ejemplo, si $A = [-3, 0) \cup [1, \sqrt{3})$, entonces las cotas superiores de A son todos los números reales mayores o iguales que $\sqrt{3}$. Hay infinitas cotas superiores. La menor de todas ellas es precisamente $\sqrt{3}$ y, por lo tanto, $\sqrt{3} = sup(A)$. Como $\sqrt{3} \notin A$, podemos asegurar que A no tiene máximo.
5. Si $L = sup(A)$ y $h < L$, entonces siempre es posible encontrar algún elemento $a \in A$ tal que $h < a \leq L$. En efecto, si así no fuera, todos los elementos de A estarían a la izquierda de h, con lo cual h se constituiría en cota superior de A, contradiciendo el hecho de que L es la menor de las cotas superiores de ese conjunto.
6. Similares consideraciones valen para cotas inferiores, mínimo e ínfimo de un conjunto, conceptos que esperamos repases por tu cuenta.

7. Como decíamos, un conjunto puede estar acotado superiormente y no tener máximo. No ocurre lo mismo con el supremo. La propiedad de **completitud** del conjunto de números reales afirma que **«todo subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente, tiene supremo».** Este hecho tiene consecuencias relevantes que están estrechamente vinculadas con la distinción entre $\mathbb{R}$ y el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$. Como consecuencia de la completitud, por ejemplo, es posible probar que, una vez fijado un sistema de abscisas sobre una recta r, existe una correspondencia biunívoca (función biyectiva) entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de r. En otras palabras, los reales llenan la recta mientras que los racionales no.
8. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no cumple la propiedad de completitud. Por ejemplo, el subconjunto A de $\mathbb{Q}$, definido como

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \,/\, q > 0 \;\; y \;\; q^2 < 2\}$$

   es no vacío, está acotado superiormente, pero NO tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (el supremo sería $\sqrt{2}$, que no está en el universo de los racionales).
9. Para demostrar los teoremas de Bolzano y de Weierstrass es necesario utilizar la completitud de $\mathbb{R}$. Dicho de otro modo, estos teoremas no son válidos si nuestro universo fuera el conjunto de números racionales ($\mathbb{Q}$). Sus demostraciones tienen cierta complejidad y trascienden los objetivos de este curso.

Cotas, supremo e ínfimo de funciones

Las nociones mencionadas anteriormente se trasladan a una función vía su recorrido. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, x \in I \,/\, y = f(x)\}$ su recorrido (conjunto de todas las imágenes). Tenemos entonces que:

1. un número $k \in \mathbb{R}$ es cota superior de la función si k es cota superior del $Rec(f)$. En otras palabras, si $k \geq f(x),\ \forall\, x \in I$.
2. la función está acotada superiormente si $Rec(f)$ es un conjunto acotado superiormente.
3. un número M es el máximo de f en I si es el máximo de $Rec(f)$.
4. un número L es el supremo de f en I si es el supremo de $Rec(f)$.

En particular, desde el último punto de la parte anterior, podemos afirmar que si f tiene máximo en I entonces está acotada superiormente en I. Desde esta afirmación es posible deducir (mediante su contrarecíproco), que si f no está acotada superiormente en I, entonces no puede tener máximo en I. Sin embargo, podemos realizarnos otra nueva pregunta que aún no hemos contestado: ¿será cierta la siguiente afirmación?

Si f está acotada superiormente en I, entonces f tiene máximo en I.

La afirmación es falsa, ya que el $Rec(f)$ puede estar acotado superiormente y no tener máximo. Lo que podemos afirmar es que si f está acotada superiormente en I entonces f tiene supremo en I. Como ejemplo de esta afirmación podemos volver al caso 3 del ejemplo

7.2.2, donde se considera la función $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 4x$. Se cumple que $Rec(f) = (0, 4)$ (recuerda la gráfica). Esta función no tiene máximo en el intervalo $(0, 2)$, si bien su supremo en dicho intervalo es el número 4.

Observación 7.4.1. Cotas inferiores y función acotada inferiormente
Los conceptos y resultados de cotas inferiores y de función acotada inferiormente son análogos.

Ejercicio 7.13.

Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$.

(b) Si f es continua en (a, b), entonces f está acotada superiormente en (a, b).

(c) Si f está acotada superiormente en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.

Capítulo 8

Derivabilidad

En la introducción al capítulo 5 nos habíamos referido a la noción de velocidad promedio de un viaje en auto, considerándola como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla. La misma idea resulta de extrema utilidad en otros contextos. Supongamos que tenemos cierta magnitud y que depende de otra magnitud x mediante la función $y = f(x)$ (piensen, por ejemplo, en tasa de desempleo en función del tiempo, en producto bruto interno en función del tiempo o en inflación en función del desempleo). El cociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es la tasa promedio de cambio de la función f con respecto a x, y permite comparar el cambio de la función con el cambio de la variable x. Si x toma valores muy cercanos al punto a, entonces la tasa promedio de cambio estará cerca de lo que podríamos llamar *tasa instantánea de cambio* de la función en el punto a.

Estas ideas llevan a la definición de *derivada de una función*, concepto relevante en la matemática y sus aplicaciones, que fue desarrollado inicialmente durante la segunda mitad del siglo XVII por Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes sentaron las bases del cálculo diferencial. Si bien el primer objetivo fue el de modelar, describir y predecir el movimiento de los objetos, hace mucho tiempo ya que la derivada resulta imprescindible para estudiar fenómenos de las ciencias económicas y la administración.

Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=qzUfT76Olbk` (Derivadas parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=cRyeDDJ5FOk` (Derivadas parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=5ExOE8ts3zO&t=9s` (Derivadas parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=wW5J7BEDASU` (Derivadas parte 4)
`https://www.youtube.com/watch?v=ikWQDvHKVag` (Derivadas parte 5)
`https://www.youtube.com/watch?v=4lyg-Cz3zuY` (Derivadas parte 6)
`https://www.youtube.com/watch?v=Zkut_dGlZQQ` (Derivadas parte 7)

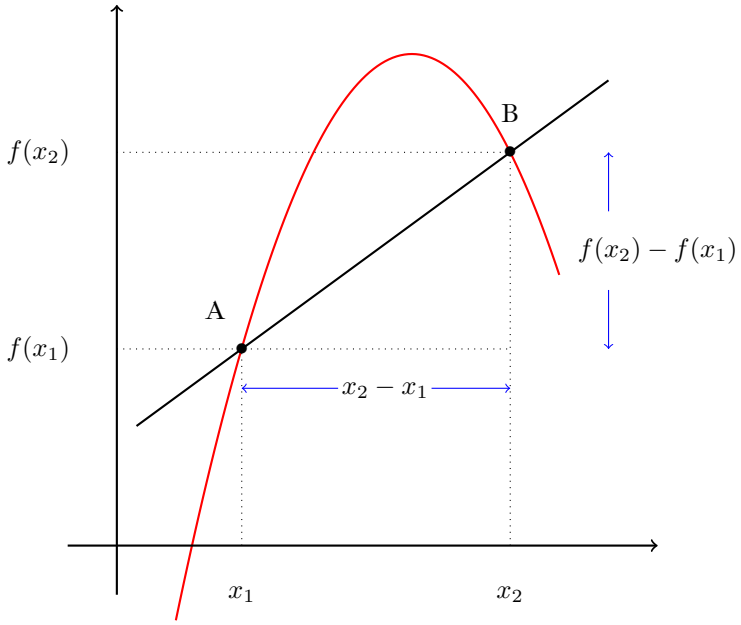
8.1 Derivada de una función en un punto

Tasa promedio de cambio

Dada una función f, consideremos dos puntos x_1 y x_2 que pertenecen a su dominio. Se denomina **tasa promedio de cambio** de la función, cuando x pasa del valor x_1 al valor x_2, a la relación

$$TPC_{x_1,x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se observa que la tasa promedio es un cociente en el que el denominador mide cuánto se incrementó la variable al pasar de x_1 a x_2, mientras que el numerador mide cuánto se incrementó la función en esas circunstancias. Si denominamos $A = (x_1, f(x_1))$ y $B = (x_2, f(x_2))$ a los correspondientes puntos de la gráfica de f, se desprende que la tasa promedio de cambio coincide con la pendiente de la recta AB.



Ejemplo 8.1.1. En un viaje en auto desde Montevideo (kilómetro 0) a Minas (kilómetro 120), se partió a la hora 8.00 y se llegó a las 9.30. Además, se modeló la distancia recorrida, medida en kilómetros, en función del tiempo transcurrido, medido en horas, desde la salida de Montevideo. Supongamos que dicha función viene dada por $f(t) = 20t^2 + 50t$.
El instante inicial $t = 0$ corresponde a la hora 8.00 mientras que el instante $t = 1,5$ corresponde a la hora 9.30. Observemos que $f(0) = 0$ y $f(1,5) = 120$, lo cual significa (como era de esperar) que la distancia recorrida en el instante inicial es 0, mientras que la distancia recorrida al final del trayecto es de 120 km.

En primer lugar nos preguntamos: ¿cuál fue la velocidad promedio del viaje? De los cursos de Física de enseñanza media conocemos que, en este caso, la velocidad promedio es la tasa promedio de cambio de la distancia recorrida en función del tiempo empleado en recorrerla.

$$\text{Velocidad promedio del viaje } = \frac{120-0}{1,5-0} = \frac{120}{1,5} = 80 \text{ km/h}.$$

Supongamos ahora que exactamente a la hora de viaje (o sea $t = 1$) nos encontramos con un control de velocidad en el que la velocidad máxima autorizada es de 85 km/h. Dado que la velocidad promedio de todo nuestro viaje fue de 80 km/h, ¿podemos estar seguros de que no recibiremos una multa? Por supuesto que no. Deberíamos saber cuál fue la velocidad exactamente en el instante $t = 1$. Ahora bien, lo que estamos necesitando es la velocidad instantánea en $t = 1$. Podemos aproximarnos a esa idea trabajando en intervalos de tiempo cercanos a $t = 1$. Por ejemplo, la velocidad promedio entre los tiempos 1 y $1,1$ es

$$\frac{f(1,1)-f(1)}{1,1-1} = \frac{79,2-70}{0,1} = 92 \text{ km/h},$$

mientras que la velocidad promedio entre los tiempos 1 y $1,01$ es

$$\frac{f(1,01)-f(1)}{1,01-1} = \frac{70,902-70}{0,01} = 90,2 \text{ km/h}.$$

Resulta razonable considerar la velocidad promedio entre el instante $t = 1$ y un instante genérico t (observar que no nos interesa si $t > 1$ o $t < 1$):

$$\frac{f(t)-f(1)}{t-1},$$

y luego tomar el límite para $t \to 1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)-f(1)}{t-1}.$$

En este caso queda:

$$\lim_{t\to 1} \frac{20t^2+50t-70}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(20t+70)}{t-1} = 90.$$

Entonces la velocidad instantánea en $t = 1$ es de 90 km/h. ∇

Función derivable y derivada en un punto

La idea desarrollada en el ejemplo 8.1.1 se puede plantear en general. Dada una función f consideremos un punto a fijo y un punto genérico x, ambos en el dominio de f. Cuando pasamos de a a x, el incremento en la variable es

$$\Delta x \ = \ x - a,$$

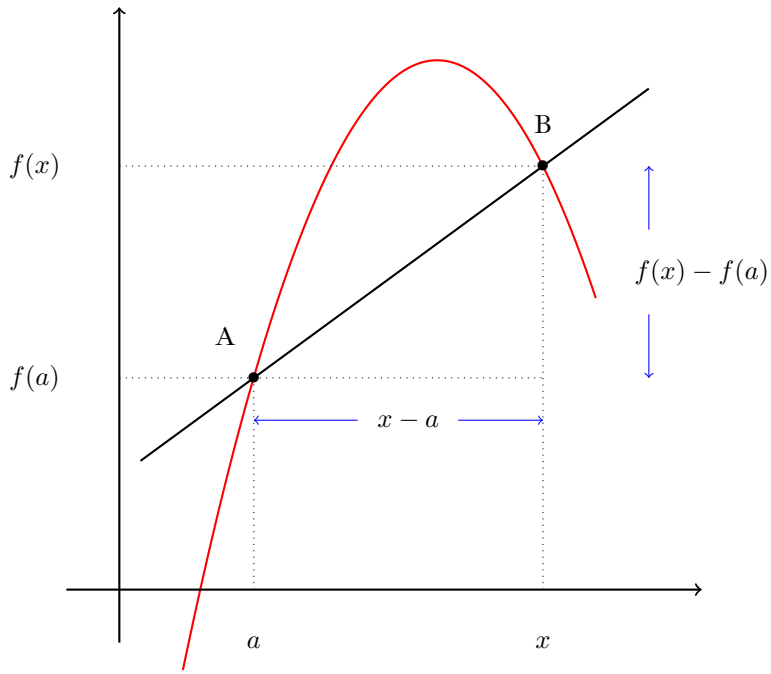
y el correspondiente incremento en la función vale

$$\Delta f \ = \ f(x) - f(a).$$

El **cociente incremental**, o tasa promedio de cambio, de la función al pasar la variable del valor a al valor x es

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Nuevamente, podemos observar que el cociente incremental coincide con la pendiente de la recta AB.



Definición 8.1.1. Función derivable en un punto
Sea f una función y a un punto de su dominio. Se dice que la función f es **derivable** *en el punto a si, y solo si, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe y es finito.*

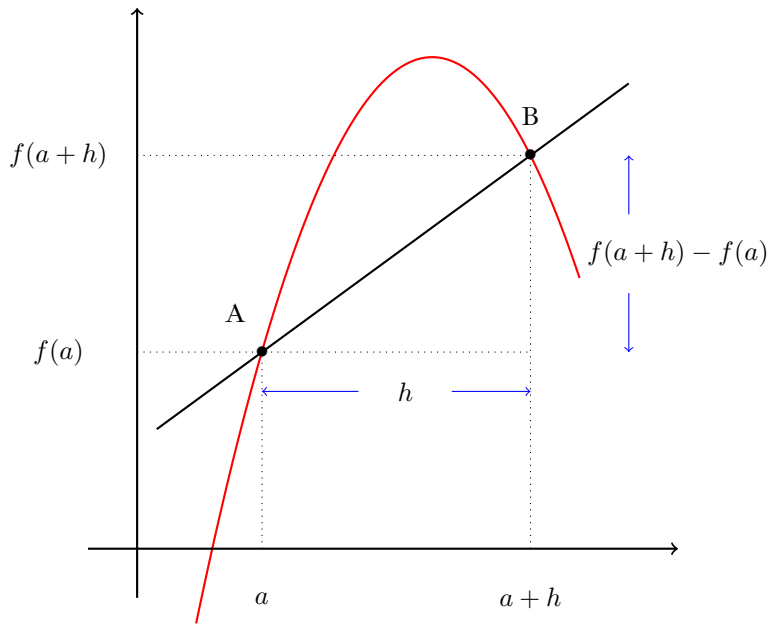
Definición 8.1.2. Derivada de una función en un punto.
Sea f una función derivable en un punto a de su dominio. Llamamos derivada de f en a al valor $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

La derivada de f en el punto a se simboliza $f'(a)$ o también $\dfrac{df}{dx}(a)$. Este número representa la tasa instantánea de cambio de la función en el punto a. Es decir,

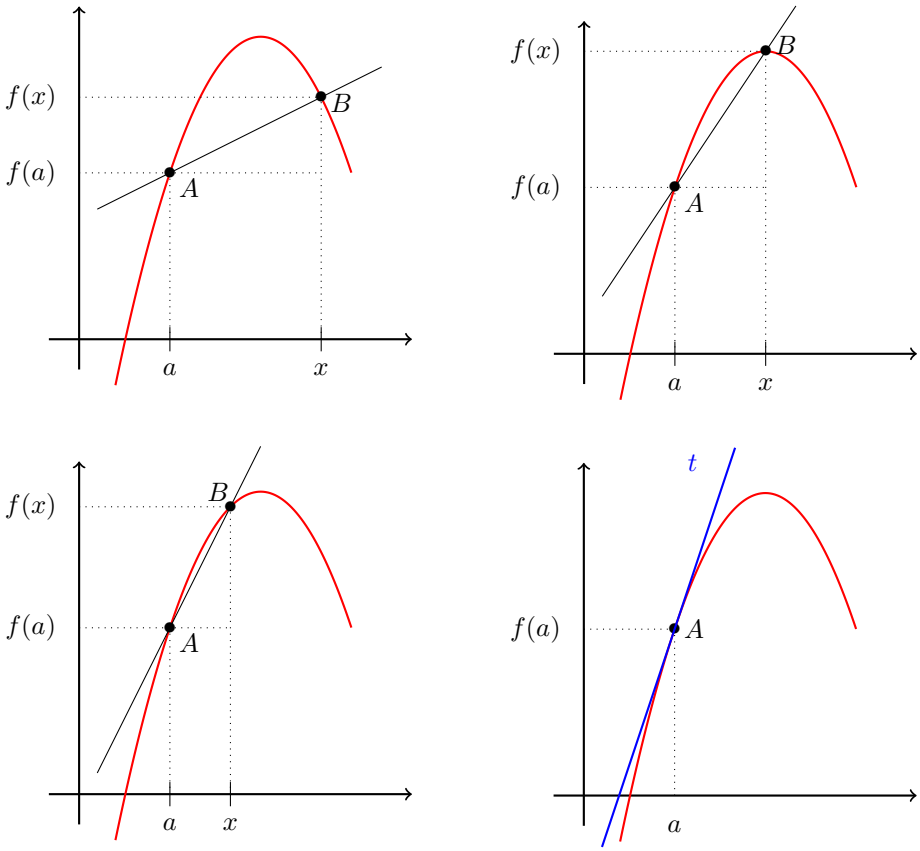
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Observemos que si al incremento $x-a$ le llamamos h, entonces la derivada de la función f en el punto a se puede expresar también como

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Observación 8.1.1. Interpretación geométrica de la derivada
Sea f una función derivable en el punto a; consideremos los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (x, f(x))$ de su gráfica. Queremos observar qué ocurre con la recta AB a medida que x se acerca al punto a (en las gráficas presentadas se realiza solamente el caso en que $x > a$, pero es análoga su representación para $x < a$).



Parece razonable afirmar que, a medida que x se acerca al punto a, la recta AB se va acercando a la recta t (en rojo en la figura), que es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $A = (a, f(a))$.

Como el cociente incremental $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es la pendiente de la recta AB, su límite cuando $x \to a$ debería coincidir con la pendiente de la recta t.

En resumen, podemos afirmar que se cumple que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $A = (a, f(a))$.

Observación 8.1.2. Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto Si f es derivable en a, entonces la recta t tangente al gráfico de f en el punto $A = (a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto y que tiene como pendiente el número $f'(a)$. Si recordamos la forma de la ecuación de una recta determinada por un punto y la pendiente, deducimos que la ecuación de la recta t es entonces la siguiente

$$(t) \quad y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

Si bien en el curso es relevante el cálculo de derivadas, es muy importante entender el concepto, la interpretación geométrica y las propiedades que cumplen las funciones derivables. En primera instancia, se hace necesario estudiar la relación que existe entre la derivabilidad y la continuidad, de modo de comprender si algunos resultados que vimos en los capítulos previos continúan siendo válidos para funciones derivables.

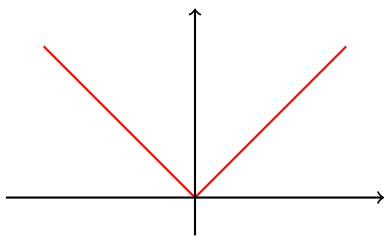
Teorema 8.1.1. Relación entre derivabilidad y continuidad
Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que f es continua en a alcanza con probar que se cumple la igualdad $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\Big(f(x) - f(a) + f(a)\Big)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(x-a) \;+\; f(a)\right) = f'(a)\,.\,0 + f(a) = f(a).\end{aligned}$$

De este desarrollo se desprende que f es continua en a. □

Observación 8.1.3. La continuidad no implica la derivabilidad
El recíproco del teorema anterior es falso. Esto quiere decir que una función puede ser continua en un punto a y no ser derivable en a. Por ejemplo, esto ocurre con $f(x) = |x|$ en $a = 0$.



Sabemos que $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Demostremos, a partir de la definición 8.1.1, que f no es derivable en 0.

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$

Como los límites laterales son diferentes es posible afirmar que no existe $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ y, por lo tanto, f no es derivable en 0.

Observación 8.1.4. Sobre el cálculo del límite del cociente incremental
Para averiguar si una función f es derivable en un punto a debemos plantearnos el límite del cociente incremental, es decir $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Según el teorema 8.1.1, si f es derivable en

a, entonces f es continua en a y, por lo tanto, $f(x)-f(a) \to 0$ cuando $x \to a$. Esto implica que al considerar $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ estamos siempre en presencia de una indeterminación. Para levantar esta indeterminación podemos aplicar las técnicas de cálculo de límites vistas en capítulos anteriores. Si bien en algunos casos podremos resolver la situación (como en los ejemplos 8.1.2 y 8.1.3), en otros no será posible debido a que aparecerán límites que no podemos calcular utilizando únicamente los conceptos vistos en este curso.

Ejemplo 8.1.2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx + n$. Desde el primer capítulo sabemos que la gráfica de f es una recta y, por lo tanto, se cumple que la tangente a la gráfica de f en cualquier punto es la misma recta. Debido a la interpretación geométrica de la derivada, podemos afirmar que la derivada de f en cualquier punto del dominio es el valor m. Para conocer si nuestra interpretación es correcta, es posible calcular el límite del cociente incremental y verificar su resultado. Tomamos entonces un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}$ y nos planteamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{(mx+n)-(ma+n)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{m(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{m\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = m.\end{aligned}$$

Se deduce que f es derivable en a y que $f'(a) = m$. Como a era un punto cualquiera, deducimos que f es derivable en todos los reales y que $f'(x) = m,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. ∇

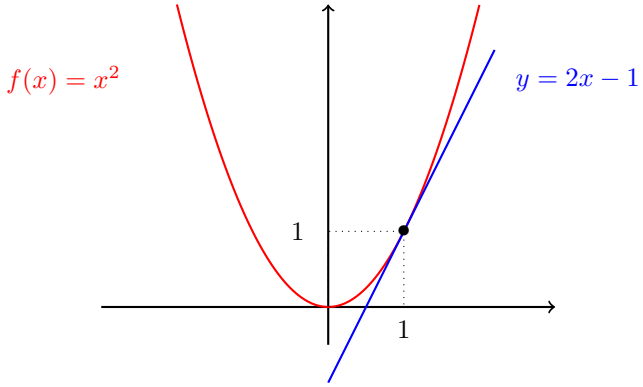
Observación 8.1.5. Derivada de una función constante
Como caso particular del ejemplo anterior, se obtiene que la derivada de una función constante (función cuya gráfica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$), da 0 para todo punto del dominio. Es más, veremos más adelante que las únicas funciones derivables con derivada nula en todo punto de un intervalo son las funciones constantes.

Ejemplo 8.1.3. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Tomamos cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y aplicamos la definición de derivada.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = 2a.$$

Se deduce que f es derivable en a y que $f'(a) = 2a$. Como a era un punto cualquiera, concluimos que f es derivable en todos los reales y que $f'(x) = 2x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. ∇

Ejemplo 8.1.4. Queremos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 1. Sabemos que dicha ecuación es de la forma $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, donde, en este caso, $a = 1$. Solamente necesitamos calcular los valores $f(1)$ y $f'(1)$ y sustituirlos en la ecuación $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. Como $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$ la ecuación queda $y - 1 = 2(x-1)$, que puede escribirse, en su forma habitual, como $y = 2x - 1$.



∇

Ejercicio 8.1.

Se considera la función $f(x) = x^3$.

(a) Demuestra que f es derivable en a, cualquiera que sea el punto $a \in \mathbb{R}$. Verifica que $f'(a) = 3a^2$.

(b) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2.

Actividad con GeoGebra 8.1.

Puedes realizar la siguiente actividad trabajando con GeoGebra en este enlace.
Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x - 2$. Seleccionando los puntos A y B, puedes desplazarlos sobre el gráfico de la función y observar la posición de la recta que determinan.

1. ¿Cuál es la tasa de promedio de cambio de la función f cuando pasamos de $x = 1$ a $x = 2$?
2. ¿Será la misma que la de $x = 3$ a $x = 4$? ¿O la de $x = -2$ a $x = -1$?
3. Para el caso en que la abscisa del punto A es $x = 1$:
   (a) Halla las coordenadas del punto B para que la pendiente de la recta AB sea 3.
   (b) ¿Qué valores puede tomar la abscisa de B para que la pendiente de la recta AB esté comprendida entre 0 y 3?
   (c) ¿Cuál es el $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?
   (d) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 1.

8.2 Función derivada y cálculo de derivadas

Si f es una función derivable en cada punto de cierto conjunto U, podemos considerar la función que a cada $x \in U$ le hace corresponder el número $f'(x)$. Esta nueva función se llama **función derivada de f,** y está definida por

$$f' : U \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x).$$

Si recordamos los ejemplos 8.1.2 y 8.1.3 y el ejercicio 8.1 concluimos que:

- si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = mx + n$ entonces su función derivada es $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f'(x) = m$.
- si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2$ entonces su función derivada es $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f'(x) = 2x$.
- si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^3$ entonces su función derivada es $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f'(x) = 3x^2$.

Es importante tener en cuenta que, una vez que obtenemos una fórmula genérica para $f'(x)$, podemos utilizarla sin necesidad de aplicar la definición de derivada. El siguiente teorema establece las funciones derivadas de algunas funciones básicas.

Teorema 8.2.1. Derivadas de algunas funciones básicas

1. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^n$ es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ y su función derivada es $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*
2. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = e^x$ es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ y su función derivada es $f'(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*
3. *La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = L|x|$ es derivable en todo punto de $\mathbb{R} - \{0\}$ y su función derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar solamente la primera afirmación. Para ello recurrimos a la definición de derivada, es decir, tomamos un punto cualquiera a del dominio de la función y tratamos de calcular el límite del cociente incremental:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Para factorizar el numerador aplicamos el esquema de Ruffini, sabiendo que a es raíz:

	1	0	0	$\cdots$	0	$-a^n$
a		a	a^2	$\cdots$	a^{n-1}	a^n
	1	a	a^2	$\cdots$	a^{n-1}	0

Resulta entonces que el numerador puede factorizarse de la siguiente manera

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

y podemos aplicar

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})}{\cancel{x-a}}\\ &= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})\\ &= a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}.\end{aligned}$$

Se deduce que f es derivable en a y que $f'(a)=na^{n-1}$. Como a era un punto cualquiera, resulta que f es derivable en todos los reales y que $f'(x)=nx^{n-1}, \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Observación 8.2.1. Derivada de la función potencial
Para $x>0$, la primera parte del teorema 8.2.1 también es válida aunque n no sea natural. Es decir, si consideramos la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\ /\ f(x)=x^\alpha$, entonces su función derivada es $f'(x)=\alpha\ x^{\alpha-1},\ \forall\ x>0$. También es válido el resultado para $x<0$ en aquellos casos en que x^α esté definida para $x<0$.

Ejemplo 8.2.1. Consideramos la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ (función raíz cuadrada). Según la observación 8.2.1 podemos calcular su función derivada para todo $x>0$:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}\,x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

∇

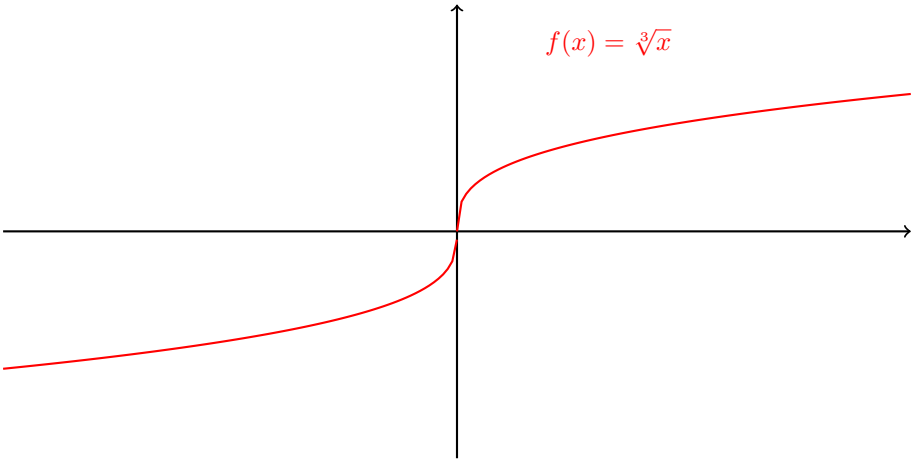
Ejemplo 8.2.2. Consideramos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ (función raíz cúbica). Aplicando nuevamente la observación 8.2.1, obtenemos la siguiente derivada para todo $x\neq 0$:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}\,x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ahora bien, sabemos que la función f está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Resulta natural preguntarnos si también es derivable en 0. Para investigarlo aplicamos la definición de derivada.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1/3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

El límite del cociente incremental existe, pero no da finito. Podemos concluir entonces que $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0. Tenemos aquí otro ejemplo de una función continua en un punto (en este caso el 0) y que no es derivable en ese punto. Al observar la gráfica de f vemos que, desde el punto de vista geométrico, la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 0 es el propio eje $\overrightarrow{Oy}$, que es una recta que no tiene pendiente.



∇

Ejercicio 8.2.

Para cada una de las siguientes funciones halla la ecuación de la recta tangente en el punto cuya abscisa se indica. Verifica los resultados utilizando GeoGebra.

(a) $f(x) = L(x)$ en $a = 1$.
(b) $f(x) = e^x$ en $a = 0$.
(c) $f(x) = x^3$ en $a = 2$.
(d) $f(x) = x^5$ en $a = -1$.

Una vez que conocemos la derivada de algunas funciones, interesa estudiar qué ocurre cuando tenemos operaciones entre esas funciones. El próximo teorema establece las reglas que permiten calcular derivadas de sumas, productos y cocientes de funciones.

Teorema 8.2.2. Suma, producto y cociente de funciones derivables
Sean f y g dos funciones derivables en un punto a. Entonces se cumple que

1. $f + g$ *es derivable en* a *y* $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $f - g$ *es derivable en* a *y* $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.
3. $f\ g$ *es derivable en* a *y* $(f\ g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. *Si* $g(a) \neq 0$, *entonces* f/g *es derivable en* a *y* $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos solo el caso de la suma (el de la resta es muy similar), pues si bien los casos correspondientes a la función producto y a la función cociente se demuestran mediante deducciones similares, son un poco más complejos. Tenemos que plantearnos el límite del cociente incremental (en a) de la función suma:

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\right)\end{aligned}$$

Como por hipótesis sabemos que f y g son derivables en a, se cumple que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\quad\text{y}\quad\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a).$$

Luego, aplicando los teoremas relativos al límite de un producto y de una suma de funciones, se obtiene

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=f'(a)+g'(a).$$

Eso es lo que queríamos demostrar. □

Observación 8.2.2. Derivada del producto de una constante por una función.
Con relación a la parte (3) del teorema anterior, veamos qué ocurre cuando la función f es una función constante, es decir, $f(x)=k, \forall\, x\in\mathbb{R}$. Aplicando la regla de derivada de un producto obtenemos

$$(k\ g(x))'=k'\ g(x)+k\ g'(x)=0\ g(x)+k\ g'(x)=k\ g'(x).$$

Resulta entonces que, si k es una constante, entonces vale la siguiente igualdad.

$$\Big(k\ g(x)\Big)'\ =\ k\ g'(x).$$

Ejemplo 8.2.3. Veamos algunos ejemplos en los que se calcula la función derivada aplicando los teoremas 8.2.1 y 8.2.2.

- $\Big(x^3+e^x+L|x|\Big)'=3x^2+e^x+\frac{1}{x}$.
- $\Big(7x^3\Big)'=7\ \Big(x^3\Big)'=21\ x^2$.
- $\Big(2x^3-5x^2+7x-29\Big)'=6x^2-10x+7$.
- $\Big(-3x^5+x^4-8x^3+4x^2+5x+14\Big)'=-15x^4+4x^3-24x^2+8x+5$.
- $\Big(x\ e^x\Big)'=e^x+x\ e^x=e^x(1+x)$.

- $\left(x^2\, e^x\right)' = 2x\, e^x + x^2\, e^x = x\, e^x\, (2+x)$.
- $\left(x\, L(x) + 5x - 4\right)' = L(x) + x\, \dfrac{1}{x} + 5 = L(x) + 6$.
- $\left(\dfrac{x^2 - 4x + 7}{x}\right)' = \dfrac{(2x-4)x - (x^2 - 4x + 7)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 7}{x^2}$.
- $\left(\dfrac{e^x}{3x+1}\right)' = \dfrac{e^x(3x+1) - 3e^x}{(3x+1)^2} = \dfrac{e^x(3x-2)}{(3x+1)^2}$. ∇

Actividad con GeoGebra 8.2.

Puedes realizar la siguiente actividad trabajando con GeoGebra en este enlace.

1. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x - 2$. Para trabajar con esta función debes seleccionar el deslizador para que el valor de a sea 3.
   (a) Halla $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(2)$.
   (b) ¿En qué puntos la derivada de f vale 7?
2. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$. Para trabajar con esta función debes seleccionar el deslizador para que el valor de a sea 9.
   (a) Halla $f'(1/3)$ y determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $1/3$.
   (b) ¿Para qué valores de x la derivada de f vale 0?
   (c) Indica el intervalo en el cual la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es negativa en todos sus puntos.
3. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \dfrac{-x^3}{3} + x^2 - x - 2$. Para trabajar con esta función debes seleccionar el deslizador para que el valor de a sea -3.
   (a) Determina $f'(x)$.
   (b) Determina gráfica y analíticamente los puntos de la gráfica de f en los cuales la tangente es paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$.
   (c) ¿Existe algún punto en el cual la tangente al gráfico de f tenga pendiente positiva?

Ejercicio 8.3.

En cada uno de los siguientes casos calcula $f'(x)$ y encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto cuya abscisa a se indica.

(a) $f(x) = x^3 - 2x$, $a = -1$.
(b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $a = 5/2$.
(c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$, $a = 2$.
(d) $f(x) = 2x^3 - 5e^x + 4$, $a = 0$.
(e) $f(x) = L(x) - x^3$, $a = 1$.
(f) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 5$, $a = -1$.

Ejercicio 8.4.

Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Encuentra los puntos de la gráfica de f en los cuales la tangente es horizontal (o sea paralela al eje Ox).

Ejercicio 8.5.

Sea $f(x) = L|x|$. Halla los puntos de la gráfica de f en los cuales la tangente es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 20 = 0$.

Ejercicio 8.6.

En cada uno de los siguientes casos encuentra los valores de a y b para que las funciones f y g tengan la misma recta tangente en el punto de abscisa 0.

(a) $f(x) = e^x$ y $g(x) = -x^2 + ax + b$.

(b) $f(x) = a + e^x$ y $g(x) = -x^2 + bx + 3$.

(c) $f(x) = a + L|x + 1|$ y $g(x) = -x^2 + bx + 5$.

Ejercicio 8.7.

Para la distancia recorrida por un auto $d(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2$, d se mide en decenas de km y t en horas con $(0 \leq t \leq 4)$. Calcula la velocidad en el instante $t = 2$.

Ejercicio 8.8.

Se deja caer un objeto desde un edificio de 80 metros de altura. La altura del objeto se determina en función del tiempo según la función $f(t) = 80 - 5t^2$, donde el tiempo t se da en segundos y la altura $f(t)$ en metros.

(a) Halla la velocidad instantánea en el primer segundo.

(b) ¿Cuánto tarda el objeto en caer al suelo?

(c) Calcula la velocidad en el instante que toca el suelo.

Ejercicio 8.9.

Un proyectil es lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de 100 metros por segundo. Esto genera la función $f(t) = 100t - 5t^2$ que nos indica la altura del proyectil medida en metros en función del tiempo medido en segundos.

(a) Calcula la velocidad a los 3 segundos del lanzamiento.

(b) ¿Cuánto tarda el objeto en caer al suelo?

(c) Calcula la velocidad en el instante de impactar con el suelo.

8.3 Regla de la cadena y más cálculos de derivadas

A lo largo del libro hemos visto que muchas de las funciones con las que trabajamos no se pueden expresar como operaciones básicas de funciones elementales, por lo que hemos recurrido a la composición de dos (o más) funciones. El siguiente resultado es un pilar fundamental para extender las reglas del cálculo de derivadas.

Teorema 8.3.1. Regla de la cadena (teorema de la derivada de la función compuesta)
Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces la función $g \circ f$ es derivable en el punto a y se cumple

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'(f(a))\; f'(a).$$

Observación 8.3.1. Derivada de la función compuesta en un punto genérico
Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones derivables en sus respectivos dominios, entonces se cumple

$$(g \circ f)'(x) \;=\; g'\big(f(x)\big)\; f'(x).$$

Esta expresión también puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Big(g(f(x))\Big)' \;=\; g'\big(f(x)\big)\; f'(x).$$

Ejemplo 8.3.1. Queremos calcular la derivada de la función $h(x) = L|f(x)|$, donde f es una función derivable y que no se anula en cierto conjunto U. Reconocemos esta función h como la composición de g con f, donde g (la función logarítmica) viene dada por $g(x) = L|x|$. De la función g conocemos su derivada, que es $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Entonces, si aplicamos la regla de la cadena para $x \in U$, obtenemos

$$\Big(L|f(x)|\Big)' = h'(x) = g'\big(f(x)\big)\; f'(x) = \frac{1}{f(x)}\; f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

En general, podemos concluir que la función derivada de h en el dominio U es

$$h' : U \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; \; h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},\; \forall\, x \in U.$$

∇

De manera similar, aplicando el teorema 8.3.1 y admitiendo que la función cumple con sus hipótesis, se obtienen las derivadas que aparecen en la segunda y tercera fila de la siguiente tabla.

Tabla de derivadas

Función	Función derivada
$\Big(f(x)\Big)^{\alpha}$	$\alpha\,\Big(f(x)\Big)^{\alpha-1}\,f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\,f'(x)$
$L\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{1}{f(x)}\,f'(x)$

Ejemplo 8.3.2. Presentamos algunos ejemplos de cálculo de derivadas en los que se aplica la regla de la cadena. En cada caso, te sugerimos que pienses qué funciones toman el rol de f y g en el teorema 8.3.1.

- $\Big((2x+1)^3\Big)' \;=\; 3\,(2x+1)^2\,2 = 6\,(2x+1)^2.$
- $\Big((x^2-5x+6)^4\Big)' \;=\; 4\,(x^2-5x+6)^3\,(2x-5).$
- $\Big(e^{x^3}\Big)' \;=\; e^{x^3}\,3x^2.$
- $\Big(e^{-2x}\Big)' \;=\; e^{-2x}\,(-2).$
- $\Big(L|x^2+x+1|\Big)' \;=\; \dfrac{2x+1}{x^2+2x+1}.$
- $\Big(L|mx+n|\Big)' \;=\; \dfrac{m}{mx+n}.$ ∇

Ejemplo 8.3.3. Presentamos ahora algunos ejemplos de cálculo de derivadas en los que se combina la composición con otras operaciones.

- $\Big(x\,(2x+1)^3\Big)' \;=\; (2x+1)^3 + x\,6\,(2x+1)^2 = (2x+1)^2\,(8x+1).$
- $\Big(x^2\,e^{4x}\Big)' \;=\; 2x\,e^{4x} + x^2\,e^{4x}\,4 = 2x\,e^{4x}\,(1+2x).$
- $\left(\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}\right)' = \dfrac{2e^{2x}(x^2+1) - e^{2x}2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2+1-x)}{(x^2+1)^2}.$
- $\left(L\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)' = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\right) = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}.$ ∇

Ejercicio 8.10.

La siguiente tabla de valores se obtuvo para dos funciones f y g, y su derivadas f', g'. Completa la tabla correspondiente para las funciones $f \circ g$, $g \circ f$ y sus derivadas.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)'(x)$	$(g \circ f)'(x)$
0	1	2	5	-3				
1	3	0	-2	1				
2	0	3	2	4				
3	2	1	-1	$-\frac{1}{2}$				

Ejercicio 8.11.

Se considera la función $f(x) = L|2x+1|$. Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta de ecuación $2x - 3y + 20 = 0$.

Ejercicio 8.12.

Calcula la función derivada en los siguientes casos.

(a) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

(b) $\dfrac{2x+1}{x+3}$.

(c) $(x^2+4)e^{-2x}$.

(d) $(2x-1)e^{-x^2}$.

(e) $\left(4x^2 - 2x\right)^4$.

(f) $(x^2 - 2x + 3)L|x|$.

(g) $\dfrac{e^{-2x}}{-x+3}$.

(h) $L\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right|$.

(i) $(1+x)^2\,(2-x)^3$.

(j) $x^2\, e^{1/x}$.

(k) $x^2\,\sqrt{x}$.

(l) $x\,\sqrt{x^2+1}$.

Ejercicio 8.13.

Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$ en los siguientes casos. Vale destacar que $f''(x)$ es la función derivada de la función $f'(x)$, es decir $f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$.

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 9$.

(b) $f(x) = xL|x| - x$.

(c) $f(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+4}$.

(d) $f(x) = x\, e^{1/x}$.

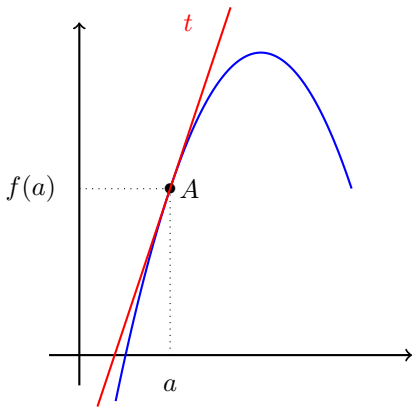
(e) $f(x) = 3L\left|\dfrac{x-1}{5-x}\right| - 4x + 10$.

(f) $f(x) = x^2 - 2x + 2 + (x-2)e^x$.

8.4 Aproximación por una función lineal

En algunas aplicaciones de funciones reales en la economía sucede que nos encontramos frente a situaciones en las que no conocemos exactamente la función o en las que, si bien la conocemos, resulta muy difícil encontrar sus valores funcionales. En estos casos, se utilizan estrategias que nos permiten aproximar funciones mediante otras funciones más simples. Por supuesto, las aproximaciones de funciones contienen un error que debemos ser capaces de cuantificar.

En esta oportunidad, comenzamos con la aproximación de funciones mediante las funciones más simples que conocemos, que son las lineales. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $a \in U$. Si estamos considerando valores de x próximos al punto a, entonces es razonable pensar que la función y su recta tangente tomarán valores cercanos.



Más aún, se cumple que entre todas las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la que mejor aproxima a la función si x está suficientemente próximo al punto a.

Sabemos que la ecuación de dicha recta tangente es $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$. La denominada aproximación lineal (o aproximación por la recta tangente) consiste en tomar como valor aproximado de $f(x)$ la ordenada de la recta tangente correspondiente a ese valor de x. Es decir, se considera la siguiente aproximación

$$f(x) \;\approx\; f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

Por supuesto, al realizar esta aproximación se comete un error. Tanto la estimación de dicho error como la posibilidad de encontrar mejores aproximaciones —ya no mediante funciones lineales— se estudiarán en cursos posteriores y están vinculadas con los denominados desarrollos de Taylor.

Ejercicio 8.14.

Se considera la función $f(x) = -x^2 + 3x + 2$. Utilizando la recta tangente, calcula aproximadamente $f(1,1)$ y compara con el valor exacto.

Funciones marginales

Definición 8.4.1. Función marginal
Si f es una función de costo (o de ingreso o de utilidad), su derivada f' se denomina **función marginal** *de costo (o de ingreso o de utilidad, respectivamente).*

Observación 8.4.1. Interpretación de la función marginal de costo
Sea $C(x)$ el costo total para que una empresa produzca x unidades de cierto producto. Fijemos el nivel de producción en el valor $x = r$. El costo a ese nivel —o sea, el costo por producir las primeras r unidades— es $C(r)$. Si la empresa produce una unidad más, el costo por producir las primeras $r + 1$ unidades pasa a ser $C(r + 1)$. Podemos entender la diferencia $C(r + 1) - C(r)$ como el costo adicional que tiene la empresa por producir una unidad más, concretamente, la unidad número $r + 1$.

Por otro lado, sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $C(x)$ en el punto de abscisa r es $y = C(r) + C'(r)(x - r)$. Si aproximamos la función de costos por su recta tangente, obtenemos $C(r + 1) \simeq C(r) + C'(r)(r + 1 - r)$. Tenemos entonces la siguiente aproximación (cuya eficiencia dependerá de cada caso particular):

$$C(r + 1) - C(r) \simeq C'(r).$$

Si relacionamos ambas deducciones es posible asegurar que el costo marginal en un punto r resulta ser un valor aproximado del costo real que tiene la empresa por producir la unidad número $r + 1$. Por supuesto que las funciones marginales de ingreso y de utilidad tienen interpretaciones análogas.

Ejemplo 8.4.1. Supongamos que el costo por producir x unidades de cierto artículo viene dado por $C(x) = 10^{-3}x^3 + 2x + 100$ en dólares. Obtenemos la función de costo marginal simplemente derivando: $C'(x) = 3\ 10^{-3}x^2 + 2$. Por motivos de logística, a la empresa le interesa estudiar el nivel de producción $x = 100$. El costo por producir 100 unidades es $C(100) = 1300$ dólares, mientras que el costo por producir 101 unidades es $C(101) = 1332,3$ dólares. El costo real de la empresa por producir la unidad número 101 es $32,3$ dólares. Por otro lado, el costo marginal en $x = 100$ vale $C'(100) = 32$. Observamos que, en este caso, la aproximación en buena. ∇

Ejercicio 8.15.

Repite los mismos cálculos del ejemplo anterior para una función de costos dada por $C(x) = x^3 + 2x + 100$ en dólares. Comenta el resultado y explica la razón de ese comportamiento.

Ejercicio 8.16.

Supongamos que $C(x) = 0,02x^2 + 2x + 4000$ es la función de costo total (en dólares) para que una empresa produzca x unidades de cierto producto. Encuentra la función de costo marginal. Calcula el costo marginal en $x = 100$ y compara el resultado con el costo real de producir la unidad número 101.

Ejercicio 8.17.

Sea $C(x) = ax^2 + bx + c$ una función de costo. Calcula $C(x+1) - C(x)$ y demuestra que se cumple $C(x+1) - C(x) - C'(x) = a,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8.18.

La utilidad obtenida por la venta de x unidades de cierto artículo viene dada por $U(x) = 2\ 10^{-3}x^3 + 10x$. Calcula la utilidad marginal en $x = 50$. Compara el resultado con el aumento real de utilidad obtenido al vender 51 artículos.

8.5 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 8.19.

Sea $f(x) = L(x) + e^{2(x-1)} + 3$. Si $y = mx + n$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1))$, entonces $m - n$ vale

1. 4.
2. 1.
3. -1.
4. 2.

Ejercicio 8.20.

Se considera $f(x) = x^2 L(x) - bx^2 + 1$. Si se sabe que en el punto de abscisa 1 la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = -3x + 7$, entonces

1. $b = 2$.
2. $b = \frac{3}{2}$.
3. $b = -2$.
4. $b = 3$.

Ejercicio 8.21.

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $g(1) = 2$ y $g'(1) = 3$.
Si $f(x) = \left(g(x^2)\right)^2$, entonces $f'(1)$ vale

1. 4.
2. 12.
3. 24.
4. 6.

Ejercicio 8.22.

Se considera la función $f(x) = |x|$ y las siguientes afirmaciones:
(I) f es continua en -1, (II) f es derivable en -1.
Entonces

1. ambas son verdaderas.
2. solo la (I) es verdadera.
3. solo la (II) es verdadera.
4. ambas son falsas.

Capítulo 9

Variación de funciones y problemas de optimización

En el capítulo 2 planteamos un modelo en el que la demanda de determinado artículo es considerada como una función $D(p)$ que depende del precio p que se le asigne al artículo. Sabemos que el ingreso de la empresa se obtiene multiplicando el precio de cada artículo por la cantidad de artículos que se venden, con lo cual la función de ingreso viene dada por $I(p) = p\ D(p)$.

Hasta ahora habíamos considerado solamente funciones lineales de demanda y de costos, que daban lugar a funciones de ingreso y de utilidad cuadráticas. En muchos casos se requiere modelar con otro tipo de funciones, pues de esa manera podremos ajustarnos mejor a la realidad. Esto da lugar a funciones de ingreso $I(p)$, de costo $C(p)$ y de utilidad $U(p)$ más complejas, incluso no polinómicas. Con el objetivo de plantear estrategias en el negocio de la empresa, resulta relevante conocer el comportamiento de las funciones que se utilizan para modelar. Por ejemplo, es de gran información para la administración y planificación de la empresa conocer cuándo sus funciones relevantes son crecientes o decrecientes, así como encontrar sus valores máximos o mínimos en caso de que existan.

En este capítulo veremos que tanto la definición de derivada como su interpretación geométrica resultan fundamentales para resolver los problemas recién mencionados y, de manera más general, para estudiar la variación de funciones.

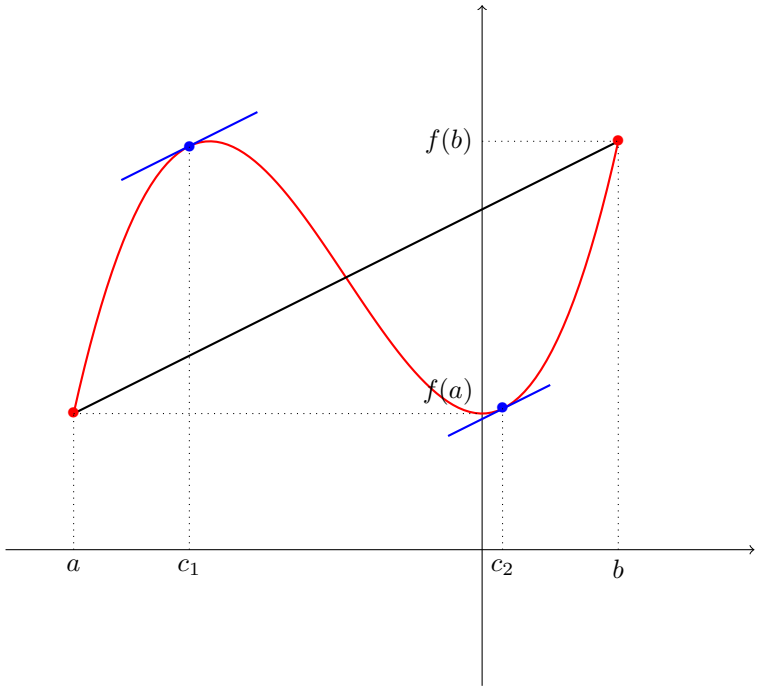
Para acompañar esta unidad temática, te sugerimos consultar los videos cuyos enlaces se indican a continuación.

`https://www.youtube.com/watch?v=LUuGAZtp_rI` (Crecimiento parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=Xe7497Laan8` (Crecimiento parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=6tPg8R9sCxI` (Crecimiento parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=ehk9yhmvnnA` (Optimización parte 1)
`https://www.youtube.com/watch?v=FNsBGyEIYHY` (Optimización parte 2)
`https://www.youtube.com/watch?v=WGgMTDqchEk` (Optimización parte 3)
`https://www.youtube.com/watch?v=ZGE2A1WCaDg` (Optimización parte 4)

9.1 Propiedades de las funciones derivables en intervalos

Veamos en primer lugar que si a la hipótesis de continuidad en un intervalo cerrado $[a, b]$ le agregamos la hipótesis de derivabilidad en el intervalo abierto (a, b), entonces podemos obtener resultados que nos permiten comprender el comportamiento de una función. Esto será consecuencia de que, al agregar la hipótesis de derivabilidad, le estamos imponiendo a la función mayores propiedades de regularidad.

Teorema 9.1.1. Teorema del valor medio de Lagrange
Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), es decir, derivable en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b). Entonces se cumple que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$.



Observación 9.1.1. Observaciones sobre el teorema de Lagrange

1. El teorema 9.1.1 asegura que el incremento de la función entre los extremos del intervalo (es decir, $f(b) - f(a)$) coincide con el producto del valor de la derivada en algún punto intermedio multiplicado por la longitud del intervalo.
2. Del punto intermedio c (que no tiene por qué ser único), solo se puede saber *a priori* que está entre a y b. El teorema no dice cómo hallarlo.
3. La tesis del teorema también se puede escribir de la siguiente manera.

$$\text{Existe al menos un punto } c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esta interpretación permite asegurar que la afirmación del teorema 9.1.1 es que existe algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es paralela a la recta AB, tal como se visualiza en la figura del teorema de Lagrange. Esto se debe a que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta determinada por los puntos $A=(a,f(a))$ y $B=(b,f(b))$, y que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa c.

La igualdad $f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a)$ es de gran importancia porque indica que, si contamos con información sobre la derivada de una función, entonces podemos obtener información sobre el comportamiento de la propia función. Veamos algunas consecuencias importantes del teorema de Lagrange que muestran lo que acabamos de afirmar.

Teorema 9.1.2. Teorema de derivada nula
Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x)=0,\ \forall\, x\in(a,b)$, entonces la función f es constante en $[a,b]$, es decir, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=k,\ \forall\, x\in[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN. Sea x_2 un punto cualquiera del intervalo $(a,b]$. A partir de las hipótesis resulta claro que f es continua en $[a,x_2]$ y derivable en (a,x_2). Aplicando el teorema de Lagrange a la función f en el intervalo $[a,x_2]$, podemos asegurar la existencia de un punto $c\in(a,x_2)$ tal que $f(x_2)-f(a)=f'(c)\,(x_2-a)$. Como por hipótesis $f'(x)=0,\ \forall\, x\in(a,b)$, tendremos, en particular, que $f'(c)=0$. Deducimos que $f(x_2)-f(a)=0$, por lo que $f(x_2)=f(a)$. Como x_2 era un punto cualquiera de $(a,b]$, hemos demostrado que $f(x)=f(a),\ \forall\, x\in[a,b]$, y esto implica que f es una función constante en $[a,b]$. □

Conviene señalar que, si en el teorema 9.1.2 solo sabemos que f es derivable en el intervalo abierto (a,b) y que $f'(x)=0,\ \forall\, x\in(a,b)$, entonces solamente podremos asegurar que f es constante en (a,b). La demostración de esta afirmación es análoga a la anterior, aunque, en este caso, tendremos que tomar dos puntos cualesquiera $x_1,x_2\in(a,b)$ con $x_1<x_2$ y aplicar el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo (x_1,x_2). Sería interesante que escribieras los detalles por tu cuenta.

Observación 9.1.2. La importancia de trabajar en un intervalo
El teorema 9.1.2 no es válido si tomamos como dominio de la función un conjunto que no sea un intervalo. Consideremos, por ejemplo, el conjunto $A=\mathbb{R}-\{0\}$, que no es un intervalo, y la función $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0,\\ 1 & \text{si } x>0.\end{cases}$$

En este caso se cumple que $f'(x)=0,\ \forall\, x\in A$ y, sin embargo, f no es constante en A.

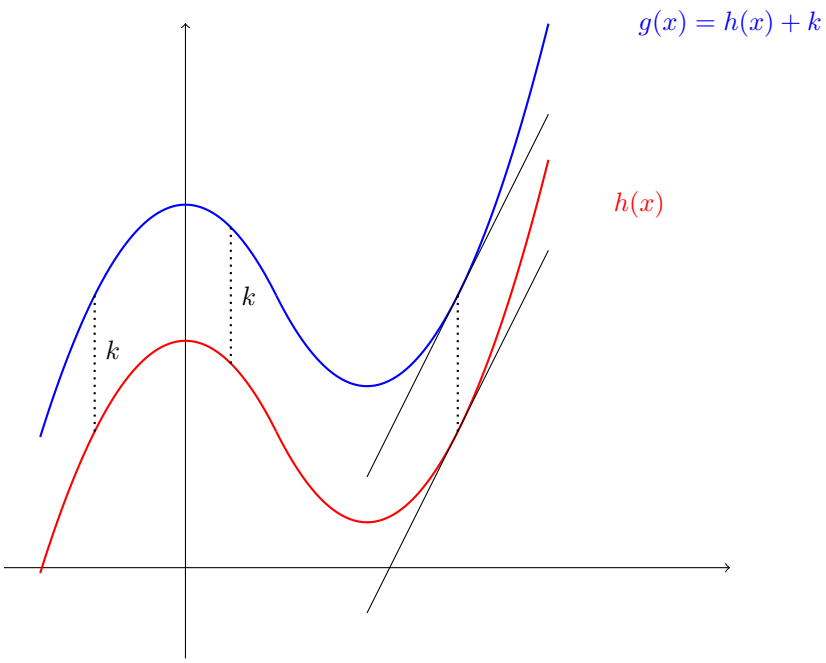
Teorema 9.1.3. Funciones con igual derivada
Sean $g : I \to \mathbb{R}$ y $h : I \to \mathbb{R}$ dos funciones que tienen la misma derivada en todo punto del intervalo I, es decir, $g'(x) = h'(x),\ \forall\, x \in I$. Entonces se cumple que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) - h(x) = k,\ \forall\, x \in I$.

DEMOSTRACIÓN. Para todo punto x del intervalo I se tiene

$$g'(x) = h'(x) \implies g'(x) - h'(x) = 0 \implies \Big(g(x) - h(x)\Big)' = 0.$$

Hemos verificado que la función $g(x) - h(x)$ tiene derivada nula en I. El teorema 9.1.2 nos permite asegurar, entonces, que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) - h(x) = k,\ \forall\, x \in I$. □

Observación 9.1.3. Interpretación geométrica del teorema 9.1.3
La hipótesis $g'(x) = h'(x),\ \forall\, x \in I$, significa que las rectas tangentes a los gráficos de g y de h en puntos correspondientes a una misma abscisa x son paralelas. El teorema asegura que, en este caso, las funciones g y h difieren en una constante o, dicho de otra forma, que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = h(x) + k,\ \forall\, x \in I$. Esto significa que la gráfica de g se obtiene trasladando la gráfica de h.



9.2 Funciones crecientes y decrecientes

Definición 9.2.1. Función creciente en un intervalo
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I cualquiera.

1. *Se dice que f es* **creciente** *en I si para toda pareja de puntos x_1 y x_2 del intervalo I, con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
2. *Se dice que f es* **estrictamente creciente** *en I si para toda pareja de puntos x_1 y x_2 del intervalo I, con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.*

Hay una definición análoga para función **decreciente** y **estrictamente decreciente** en un intervalo. Cuando una función es creciente o decreciente en un intervalo se dice que es **monótona** en ese intervalo.

Ejemplo 9.2.1. Análisis de crecimiento y decrecimiento en funciones conocidas

- $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- $g(x) = L(x)$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.
- $h(x) = x^2$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. De lo anterior resulta que h no es monótona en $\mathbb{R}$.
- Una función constante en un intervalo I es al mismo tiempo creciente y decreciente en I, pero no lo es en forma estricta. ∇

Para demostrar, aplicando la definición 9.2.1, que una función f es creciente en un intervalo I, debemos probar que $f(x_1) < f(x_2)$ para las infinitas parejas de valores $x_1,\ x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. En general, esa tarea no resulta nada sencilla. Es por eso que el siguiente teorema resulta de gran utilidad.

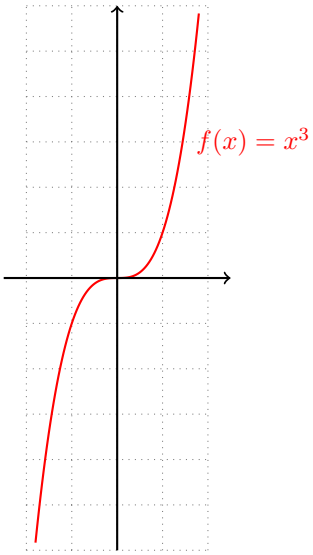
Teorema 9.2.1. Condición suficiente de crecimiento estricto
Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces la función f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del intervalo $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. Aplicando el teorema de Lagrange a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$ podemos asegurar la existencia de un punto $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$. Como por hipótesis $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, tendremos, en particular, que $f'(c) > 0$. Como a su vez el valor $x_2 - x_1 > 0$, resulta que el segundo miembro $f'(c)\ (x_2 - x_1)$ es positivo. Deducimos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, por lo que $f(x_2) > f(x_1)$. Hemos demostrado que $f(x_1) < f(x_2)$ para toda pareja de puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ y esto quiere decir, precisamente, que f es estrictamente creciente en $[a, b]$. □

Hay un resultado análogo para decrecimiento. En efecto, si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) < 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces la función f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

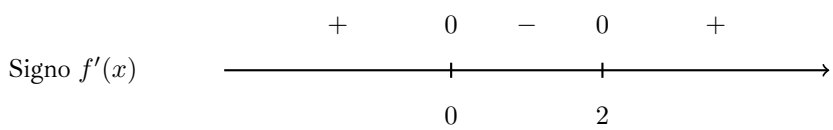
Observación 9.2.1. Relación entre crecimiento y signo de la derivada

1. Si sabemos que f es derivable en (a,b) y que $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, entonces solamente podremos asegurar que f es estrictamente creciente en (a,b). Lo mismo sucede para el caso de derivada negativa.
2. Una función puede ser estrictamente creciente en un intervalo y su derivada anularse en algunos puntos. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ y su derivada se anula en $x = 0$. La gráfica de la función f queda de la siguiente manera



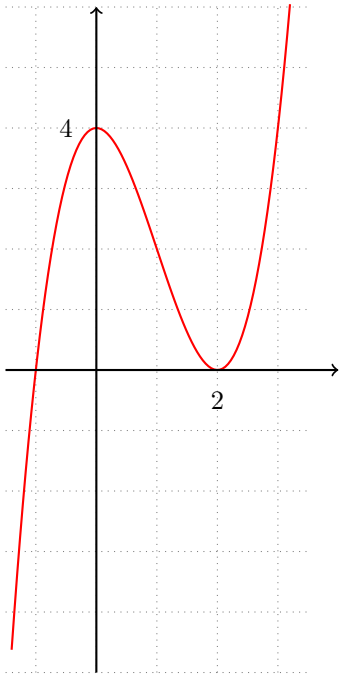
Ejemplo 9.2.2. Queremos estudiar el comportamiento de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Es decir, averiguar en cuáles intervalos es creciente y en cuáles es decreciente. Para ello resulta indispensable estudiar el signo de su derivada. Derivando $f(x)$ obtenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$



Resulta entonces que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$, es estrictamente decreciente en $[0,2]$ y es estrictamente creciente en $[2, +\infty)$.

Su gráfica es la siguiente:



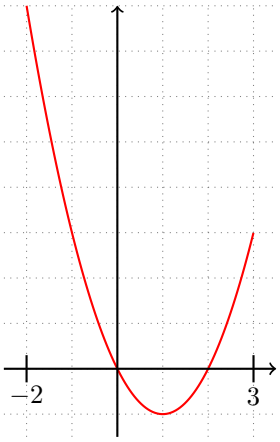
∇

En la gráfica se observa que el valor $f(0) = 4$ es un valor máximo de la función si nos restringimos a trabajar con valores de x suficientemente próximos a $x = 0$. Sin embargo, sabemos que 4 no es el máximo absoluto de la función en todo $\mathbb{R}$. Esta situación motiva la existencia de la próxima definición de extremos relativos.

Definición 9.2.2. Extremos relativos

1. *Se dice que $f(a)$ es un* **máximo relativo** *de f (o que f presenta máximo relativo en $x = a$), si existe algún intervalo abierto I al cual pertenece el punto a, tal que $f(a) \geq f(x)$, $\forall\, x \in I$.*
2. *Se dice que $f(a)$ es un* **mínimo relativo** *de f (o que f presenta mínimo relativo en $x = a$), si existe algún intervalo abierto I al cual pertenece el punto a, tal que $f(a) \leq f(x)$, $\forall\, x \in I$.*

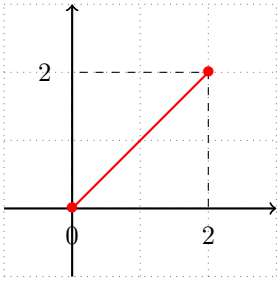
Ejemplo 9.2.3. Sea la función $f : [-2, 3] \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2 - 2x$. Queremos encontrar, en caso de que existan, los extremos relativos de f en el intervalo $[-2, 3]$. Para ello podemos utilizar su gráfica.



Se observa que f tiene un único mínimo relativo que es alcanzado en $x = 1$. Sin embargo, no tiene máximo relativo en $[-2, 3]$. Por otra parte, en $[-2, 3]$ su máximo absoluto vale $f(-2) = 8$ y su mínimo absoluto vale $f(1) = -1$. En este caso el mínimo relativo coincide con el mínimo absoluto y el máximo absoluto es alcanzado en el borde izquierdo del intervalo. ∇

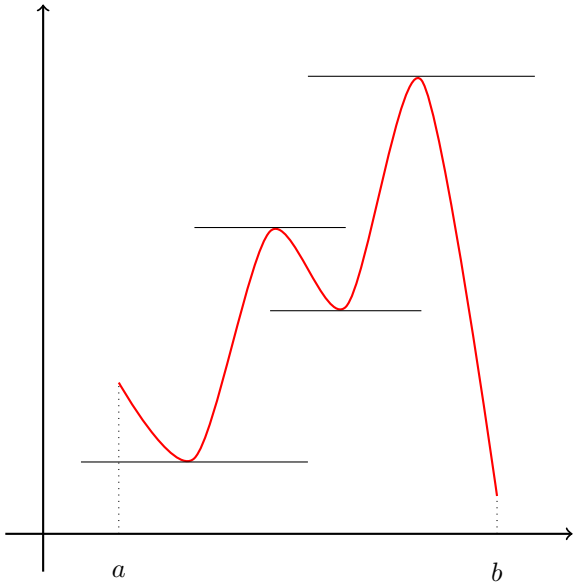
Observación 9.2.2. Relación entre extremos absolutos y relativos

1. En la definición 9.2.2 se exige la existencia de algún intervalo abierto I al cual pertenezca el punto a. Esto implica que solamente consideramos extremos relativos en puntos interiores al dominio de la función y no en los bordes del intervalo. Por ejemplo, la función, $f : [0, 2] \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x$ no tiene máximo ni mínimo relativo en $[0, 2]$. Sin embargo, su mínimo absoluto vale 0 y es alcanzado en $x = 0$, mientras que su máximo absoluto vale 2 y es alcanzado en $x = 2$.



2. Si un extremo absoluto es alcanzado en un punto interior al intervalo, entonces también es extremo relativo.
3. Una función puede tener muchos máximos relativos diferentes, pero el máximo absoluto es único. Análoga afirmación en el caso de mínimos.

Ejemplo 9.2.4. En el intervalo $[a, b]$ la función que se grafica a continuación tiene dos máximos relativos y dos mínimos relativos. ¿Puedes ubicarlos? En esta función sucede que el máximo absoluto también es relativo, mientras que el mínimo absoluto (que es $f(b)$), no es mínimo relativo.



∇

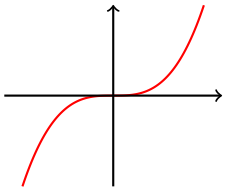
El próximo teorema establece un resultado muy intuitivo, que apareció en los ejemplos que venimos presentando, aunque no se había expuesto de manera explícita. Si una función f presenta extremo relativo en a y existe $f'(a)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$.

Teorema 9.2.2. Condición necesaria de extremo relativo

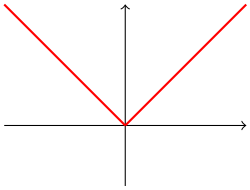
Si f presenta extremo relativo en $x = a$ y existe algún intervalo abierto I al cual pertenece el punto a en el que f es derivable, entonces necesariamente $f'(a) = 0$.

Observación 9.2.3. Extremos relativos y derivada

1. El recíproco del teorema 9.2.2 no es cierto. Basta con recordar el caso comentado en la observación 9.2.1, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^3$, para obtener un contraejemplo. Tenemos que $f'(0) = 0$, y sin embargo, esta función no presenta máximo ni mínimo relativo en $x = 0$.



2. Una función puede presentar un extremo relativo en un punto donde la función no sea derivable. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = |x|$ presenta mínimo relativo en $x = 0$, y esta función no es derivable en $x = 0$.



Ejercicio 9.1.

Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a$.
Halla a y b reales para que f tenga extremos relativos en $x = 0$ y en $x = -4$.

Ejercicio 9.2.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x\, e^{-x}$.

(a) Estudia el signo de $f'(x)$ y deduce los intervalos donde f es creciente o decreciente.

(b) Encuentra los extremos relativos de f.

(c) Calcula los límites de la función para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ y realiza un bosquejo de la gráfica de f, que puedes verificar con GeoGebra.

Actividad con GeoGebra 9.1.

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + a & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2} + bx + 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En este enlace puedes acceder a la gráfica de f y a dos deslizadores a y b.

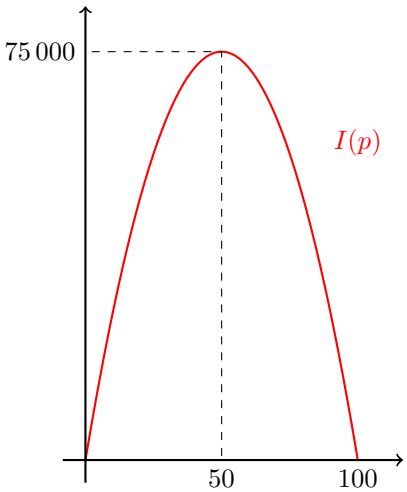
1. ¿Qué valores deben tomar a y b para que f sea continua en 0?
   Verifica usando los deslizadores en GeoGebra.
2. ¿Cómo tienen que ser a y b para que f sea derivable en 0?
   Verifica usando los deslizadores en GeoGebra.
3. Empleando GeoGebra, ¿cómo tienen que ser a y b para que f sea creciente en $\mathbb{R}$?
4. Para el caso en que f sea continua, utiliza el deslizador b para encontrar diferentes valores de b para los cuales f presente más de un extremo relativo.

9.3 Elasticidad de la demanda

Sea $D(p)$ la función de demanda de determinado artículo, en la que p representa el precio por unidad. La función $I(p) = p\ D(p)$ representa el ingreso total de la empresa —o del Estado—, que también suele denominarse gasto total de los consumidores. El gasto de los consumidores en ese bien coincide con el ingreso de la empresa —o del Estado— al venderlo. En la gran mayoría de los artículos, si el precio aumenta, la demanda decrece; sin embargo, no podemos saber *a priori* qué sucederá con el ingreso de la empresa, ya que puede crecer o decrecer. Es posible que el ingreso aumente si el efecto del aumento del precio predomina sobre la caída de la demanda, o que disminuya si el efecto de la caída de la demanda predomina sobre el aumento del precio.

Ejemplo 9.3.1. Supongamos que la función de demanda es $D(p) = 3000 - 30p$ con $0 \leq p \leq 100$.

La correspondiente función de ingreso es $I(p) = p\,(3000 - 30p)$.



Pongamos el caso en que el precio del bien estaba fijado en $p = 20$ y se estudia la posibilidad de gravar el bien con un 5 % de su precio. Es decir, que el precio del bien pase a ser $p = 21$. ¿Qué ocurre en esa circunstancia?

- $p = 20 \implies D(20) = 2\,400 \implies I(20) = 48\,000.$
- $p = 21 \implies D(21) = 2\,370 \implies I(21) = 49\,770.$

En este caso, si bien la demanda baja, el ingreso total sube.
Analicemos una situación análoga suponiendo que el precio original es $p = 60$, el que se ve aumentado en un 5 %.

- $p = 60 \implies D(60) = 1\,200 \implies I(60) = 72\,000.$
- $p = 63 \implies D(63) = 1\,100 \implies I(63) = 69\,930.$

Del análisis se obtiene que tanto la demanda como el ingreso se reducen.
Los resultados obtenidos en ambas situaciones son diferentes. Para buscar su causa, es importante conocer el comportamiento de la función ingreso. A partir de la gráfica, resulta evidente que el resultado cambia según se consideren precios superiores o inferiores a $p = 50$. Por esta razón, para analizar políticas de aumento de precios, es especialmente útil estudiar el comportamiento de la función de ingreso, lo cual está estrechamente relacionado con el estudio de su derivada. ∇

Realicemos a continuación un análisis general. Para estudiar el comportamiento de la función de ingreso calculamos su derivada.

$$I(p) = p\,D(p) \implies I'(p) = (\,p\,D(p)\,)' = D(p) + p\,D'(p).$$

Si $I'(p) > 0$, entonces la función de ingreso será estrictamente creciente en el punto p. Esta afirmación nos indica que un reducido aumento en el precio repercute en un aumento en el ingreso de la empresa. En este caso obtenemos las siguientes equivalencias:

$$I'(p) > 0 \iff D(p) + p\,D'(p) > 0 \iff D(p) > -p\,D'(p) \iff 1 > -\frac{p\,D'(p)}{D(p)}.$$

Conviene aclarar que, en el último paso, usamos que $D(p) > 0$. Por lo tanto, al dividir ambos miembros de la desigualdad por $D(p)$, el sentido de la desigualdad se mantiene. Mediante un razonamiento análogo, es posible observar que, si $1 < -\dfrac{p\,D'(p)}{D(p)}$, entonces la función de ingreso es estrictamente decreciente en el punto p.

Definición 9.3.1. Elasticidad de la demanda
Supongamos que $D : I \to \mathbb{R}$ es una función de demanda que cumple $D(p) > 0$ y $D'(p) < 0$ para todo valor de p perteneciente a un intervalo I.
Entonces, el número $\eta(p) = -\dfrac{p\,D'(p)}{D(p)}$ se denomina **elasticidad de la demanda** *en el punto $p \in I$.*

Observación 9.3.1. Interpretación de la elasticidad
A partir de las consideraciones anteriores, obtenemos las siguientes conclusiones.

1. Si $\eta(p) > 1$, entonces, si se aumenta levemente el precio, el ingreso bajará. En este caso se dice que la demanda es **elástica** para el precio p.
2. Si $\eta(p) < 1$, entonces, si se aumenta levemente el precio, la demanda cae, pero el ingreso aumenta. En este caso se dice que la demanda es **inelástica** para el precio p.

El concepto de elasticidad es de aplicación frecuente en la elaboración de políticas económicas. Por ejemplo, si el Estado necesita aumentar sus ingresos vía impuestos al consumo, es necesario analizar en qué clases de bienes los efectos de aumentar los impuestos no perjudican los ingresos. Esto se debe a que, de acuerdo a su función de ingresos, existen bienes más gravables que otros.

Ejemplo 9.3.2. Consideremos la misma función de demanda que en la introducción a esta sección, es decir, $D(p) = 3000 - 30p$ con $0 \leq p \leq 100$, calculemos su elasticidad en los precios analizados $p = 20$ y $p = 60$.

$$\eta(p) = -\frac{p\, D'(p)}{D(p)} = -\frac{p.(-30)}{3000 - 30p} = \frac{p}{100 - p}.$$

En el caso para $p = 20$ obtenemos $\eta(20) = 1/4 < 1$, por lo que concluimos que la demanda es inelástica.
En el caso $p = 60$ obtenemos $\eta(60) = 3/2 > 1$, por lo que la demanda es elástica. ∇

Ejercicio 9.3.

Supongamos que $D(p) = 240 - 2p$, para $0 \leq p \leq 120$.

(a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.

(b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 100$. En este caso ¿es elástica o inelástica? Para este precio, calcula el gasto total de los consumidores. ¿Qué ocurre con el gasto total de los consumidores si el precio se incrementa en un 5 % ?

(c) Responde las mismas preguntas de la parte anterior para $p = 50$.

Ejercicio 9.4.

Cierta función de demanda viene dada por $D(p) = 900 - p^2$, para $0 < p < 30$.

(a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.

(b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 10$. Para este precio calcula el gasto total de los consumidores. ¿Qué ocurre con el gasto total de los consumidores si el precio se incrementa en un 5 % ?

(c) Contesta las mismas preguntas que en la parte anterior ahora para $p = 20$.

Ejercicio 9.5.

Cierta función de demanda viene dada por $D(p) = 10\,000 - p^2$, para $0 < p < 100$.

(a) Verifica que $D(p)$ es no negativa y decreciente en $[0, 100]$.

(b) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.

(c) Calcula la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 20$. Para este precio calcula el gasto total de los consumidores ¿Qué ocurre con el gasto total de los consumidores si el precio se incrementa en un 5 % ? ¿Es coherente este resultado con el valor obtenido de $\eta(20)$?

(d) Calcula la elasticidad de la demanda y el gasto total de los consumidores cuando la demanda es de 3600 artículos.

Ejercicio 9.6.

Supongamos una función de demanda de la forma
$D(p) = 3 - L(3p - 5) + \dfrac{4}{p}$.
Calcula la elasticidad para $p = 2$.

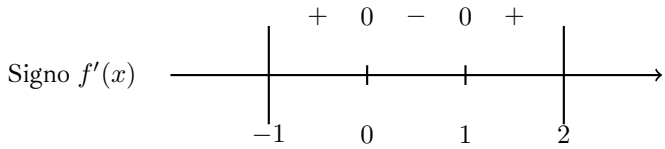
9.4 Optimización de funciones de una variable

Cuando hablamos de problemas de optimización, nos referimos a problemas en los que se requiere encontrar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de una función en determinado conjunto, que podemos pensar, de manera sencilla, como un intervalo. Si bien ya habíamos presentado algunos ejemplos y ejercicios a lo largo de los capítulos anteriores, en esta sección nos dedicaremos por completo a este tema.

Como ya vimos, para intentar hallar los extremos absolutos de una función será necesario estudiar el signo de la derivada. También debemos tener en cuenta que, si el dominio es un intervalo cerrado del tipo $[a, b]$, puede suceder que los extremos absolutos se alcancen en los extremos del intervalo, es decir, pueden alcanzarse en a o en b.

Ejemplo 9.4.1. Queremos hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ en el intervalo cerrado $[-1, 2]$. En primer lugar observamos que, como f es continua en $[-1, 2]$, el teorema de Weierstrass nos permite asegurar que efectivamente existen ambos extremos absolutos en $[-1, 2]$.

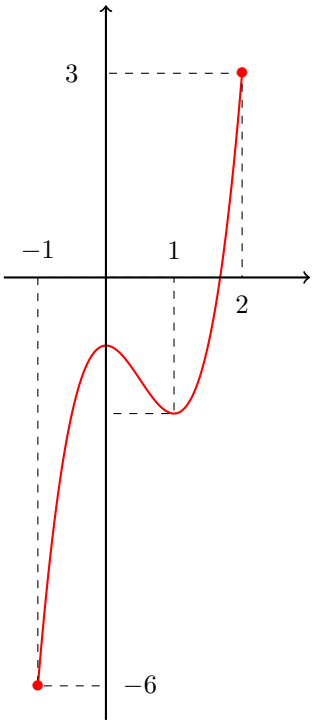
La derivada de la función f es $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, por lo cual el signo de $f'(x)$ en el intervalo $[-1, 2]$ queda de la siguiente manera



Del estudio del signo de $f'(x)$ se deduce que f es estrictamente creciente en $[-1, 0]$, es estrictamente decreciente en $[0, 1]$ y es estrictamente creciente en $[1, 2]$. Debido a este comportamiento, podemos concluir que el máximo M de f en el intervalo $[-1, 2]$ será el mayor valor entre los valores $f(0)$ y $f(2)$, mientras que el mínimo m de f en el intervalo $[-1, 2]$ será el menor valor entre los valores $f(-1)$ y $f(1)$. Realizamos los cálculos y obtenemos:

- $f(0) = -1,\ f(2) = 3 \implies M = 3.$
- $f(-1) = -6,\ f(1) = -2 \implies m = -6.$

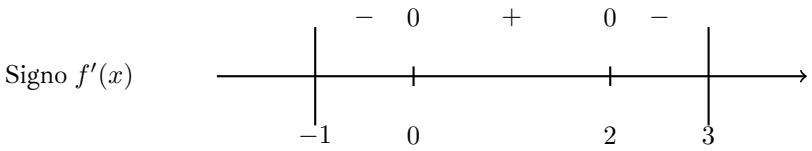
La gráfica de f es la siguiente



∇

Ejemplo 9.4.2. Queremos hallar el máximo y el mínimo absoluto de $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$. Nuevamente estamos en las hipótesis del teorema de Weierstrass en el intervalo $[-1, 3]$, lo que permite asegurar que efectivamente existen ambos extremos absolutos en el intervalo $[-1, 3]$.

La derivada de la función f es $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$ y el signo de $f'(x)$ en el intervalo $[-1, 3]$ queda de la siguiente manera

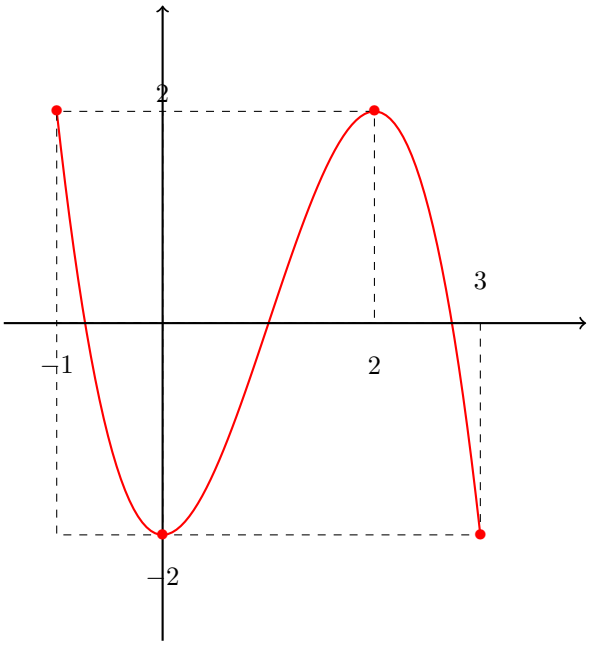


Del estudio del signo de $f'(x)$ se deduce que f es estrictamente decreciente en $[-1, 0]$, es estrictamente creciente en $[0, 2]$ y es estrictamente decreciente en $[2, 3]$. Resulta entonces que el máximo M de f en $[-1, 3]$ será el mayor valor entre los valores $f(-1)$ y $f(2)$, mientras que el mínimo m de f en $[-1, 3]$ será el menor valor entre los valores $f(0)$ y $f(3)$.

Entonces obtenemos

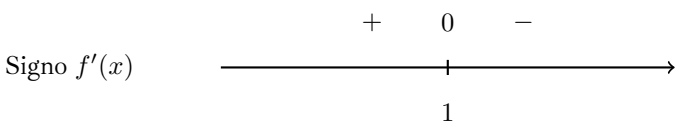
- $f(-1) = 2,\ f(2) = 2 \implies M = 2.$
- $f(0) = -2,\ f(3) = -2 \implies m = -2.$

La gráfica de f es la siguiente



Observamos que, en este caso, el máximo absoluto de f en $[-1, 3]$, cuyo valor es 2, se alcanza en $x = -1$ y en $x = 2$. Conviene señalar que esto no contradice las definiciones de extremos absolutos, ya que el máximo absoluto es un único valor, aunque pueda alcanzarse en dos puntos diferentes del dominio. En esta ocasión, ocurre lo mismo con el mínimo absoluto. ∇

Ejemplo 9.4.3. Consideremos la función $f(x) = x\, e^{-x}$ ¿Cuáles son los extremos absolutos de la función f en el intervalo $[1, 4]$?
Al aplicar la regla de la derivada del producto de funciones, se obtiene que su derivada es $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$. El estudio del signo de la derivada es



Del estudio del signo de $f'(x)$ se deduce que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 1]$ y es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$. Como f es estrictamente decreciente en $[1, 4]$, claramente se deduce que el máximo absoluto de f en dicho intervalo es $f(1) = e^{-1}$ y el mínimo absoluto es $f(4) = 4e^{-4}$. ∇

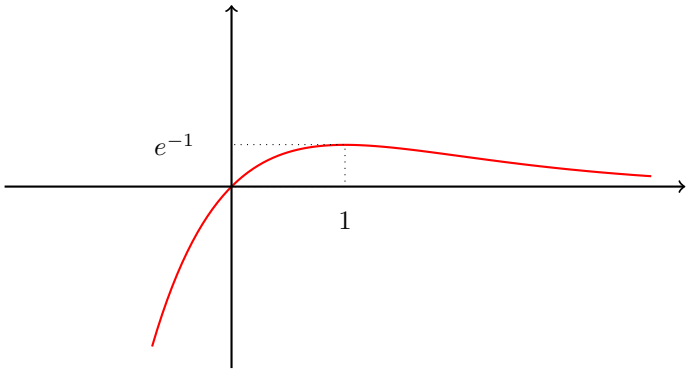
Es evidente que los resultados que obtuvimos cambian si modificamos la función que se optimiza. Pero ¿qué sucede si no cambiamos la función pero sí el intervalo donde se optimiza? Analizamos esta situación en los próximos ejemplos.

Ejemplo 9.4.4. Queremos hallar los extremos absolutos de la función $f(x) = x\, e^{-x}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$. A partir del estudio del signo de la derivada realizado en el ejemplo 9.4.3, se observa claramente que el máximo absoluto es $f(1) = e^{-1}$, mientras que el mínimo absoluto m será el menor valor entre $f(1/2)$ y $f(4)$. Con la calculadora, se obtiene que $f(1/2) \approx 0,3$ y $f(4) \approx 0,07$, por lo que podemos concluir que $m = f(4)$. ∇

Ejemplo 9.4.5. Cambiemos nuevamente el dominio a la función del ejemplo 9.4.3 y analicemos qué ocurre si consideramos la optimización en la semirrecta $[0, +\infty)$. Se observa que no nos encontramos en las hipótesis del teorema de Weierstrass y, por lo tanto, podría no existir el máximo absoluto o no existir el mínimo absoluto. Del estudio de signo de la derivada se deduce que el máximo absoluto de f en $[0, +\infty)$ es $f(1) = e^{-1}$. ¿Qué ocurre con el mínimo? Para este caso particular podemos hacer el siguiente razonamiento: como $f(0) = 0$ y $f(x) > 0,\ \forall\, x > 0$, entonces el mínimo de f en $[0, +\infty)$ es $f(0) = 0$. ∇

Ejemplo 9.4.6. Por último, ¿qué pasa con la misma función si consideramos el dominio $(0, +\infty)$? Con el máximo absoluto la respuesta es la misma. Sin embargo, no es así con el mínimo. Como la función es positiva en $(0, +\infty)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$, se deduce que f no tiene mínimo absoluto en $(0, +\infty)$. ∇

La gráfica de $f(x) = x\, e^{-x}$ en el dominio más amplio posible donde se encuentra definida (que es $\mathbb{R}$) es la siguiente.



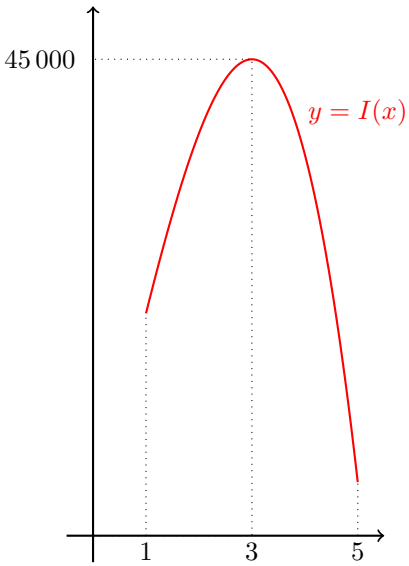
Ejemplo 9.4.7. La función de demanda de un artículo es $D(x) = 10^3\left(-x^2 + x + 21\right)$ para $1 \leq x \leq 5$, donde x es el precio por unidad, medido en cientos de pesos uruguayos. Queremos demostrar, en primer lugar, que la función D es decreciente y no negativa en el intervalo $[1, 5]$. Además, nos preguntamos para qué precio el ingreso es máximo.

Comenzamos calculando $D'(x)$ y estudiando su signo.
Tenemos que $D'(x) = 10^3\left(-2x+1\right)$, función que es estrictamente negativa en el intervalo $[1, 5]$, por lo que queda demostrado que D es una función estrictamente decreciente en el intervalo $[1, 5]$.

De lo anterior resulta que el mínimo absoluto de D en $[1, 5]$ es $D(5)$. Como $D(5) = 1\,000$, podemos afirmar que D es no negativa en $[1, 5]$ (de hecho, $D(x) \geq 1000,\ \forall\ x \in [1, 5]$).
La función de ingreso (medida en cientos de pesos) viene dada por

$$I(x) \ = \ x\, D(x) \ = \ 10^3 x\left(-x^2 + x + 21\right) \ = \ 10^3\left(-x^3 + x^2 + 21x\right).$$

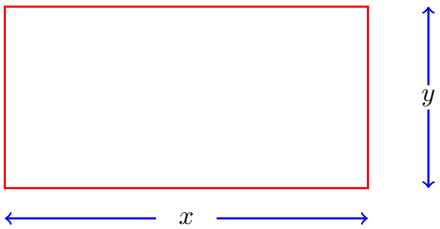
El problema de encontrar el precio para el cual el ingreso es máximo se reduce a hallar el máximo absoluto de $I(x)$ en el intervalo $[1, 5]$. Su derivada $I'(x) = 10^3\left(-3x^2 + 2x + 21\right)$ tiene raíces $-7/3$ y 3. Del estudio del signo de $I'(x)$ deducimos que $I(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $[1, 3]$ y estrictamente decreciente en $[3, 5]$. No cabe duda de que el máximo de $I(x)$ en el intervalo $[1, 5]$ es alcanzado en el punto $x = 3$. La respuesta a la pregunta es la siguiente: «Para que el ingreso sea máximo, el precio de cada artículo debe fijarse en 300 pesos». Además, podemos agregar que, para ese valor, el ingreso resultante será de $I(3) = 45\,000$ cientos de pesos, o sea, \$ 4 500 000.



∇

Ejemplo 9.4.8. Supongamos que se necesita cercar con alambrado un terreno rectangular. Lo único que importa es que que el rectángulo tenga un área A fija dada, donde A es un número positivo. En esta situación sería interesante minimizar los costos que surgen en la colocación del cerco perimetral. Este problema económico puede traducirse al siguiente problema geométrico: «Entre todos los rectángulos de área A, encontrar el de perímetro mínimo».

Si designamos con $x > 0$ e $y > 0$ las medidas de los lados del rectángulo, entonces su perímetro vale $P = 2(x + y)$.

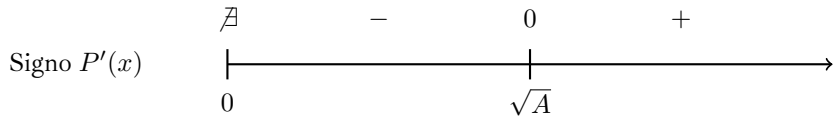


Por otra parte, sabemos que el área del rectángulo vale $x\ y = A$. De esta igualdad podemos despejar y, de modo que $y = \dfrac{A}{x}$. Al sustituir esta expresión de y en la expresión del perímetro P, obtenemos la siguiente función, que expresa el perímetro del rectángulo en función de la única variable x:

$$P(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right), \quad x > 0.$$

Calculamos la derivada de $P(x)$ y estudiamos su signo solo para los valores que tienen sentido en el problema, que es cuando $x > 0$.

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 2\,\frac{x^2 - A}{x^2}.$$



Resulta entonces que la función $P(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, \sqrt{A}]$ y es estrictamente creciente en $[\sqrt{A}, +\infty)$. Se deduce que el mínimo absoluto de la función $P(x)$ se obtiene en $x = \sqrt{A}$.

¿Qué quiere decir este resultado en el problema matemático de la optimización de los rectángulos? Como $x\ y = A$, si $x = \sqrt{A}$, entonces $y = \sqrt{A}$ y el rectángulo es un cuadrado. Hemos demostrado que entre todos los rectángulos de área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado. ¿Y qué quiere decir en el problema económico? Para minimizar los costos en la fabricación del cerco, este debe ser cuadrado. ∇

Actividad con GeoGebra 9.2.

Sea la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Se consideran los rectángulos $OHPQ$ dados en este enlace, con el punto P sobre el gráfico de f. Utilizando el deslizador puedes generar varios de estos rectángulos.

1. Muestra que el área de los rectángulos es constante al variar P.
2. Utilizando el deslizador construye un rectángulo cuyo perímetro sea mayor que 16. Te sugerimos que observes que, si uno de los lados del rectángulo es mayor que un número k, entonces su perímetro es mayor que $2k$.
3. A partir de lo anterior, ¿crees que es posible construir un rectángulo $OHPQ$ cuyo perímetro sea tan grande como se desee?
4. Obtén una función P que dependa de x para el perímetro. Estudia el $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$. Vincula esto con el ítem anterior.
5. Halla las dimensiones que deben tener los rectángulos para que el perímetro sea mínimo.
6. Calcula el perímetro para las dimensiones que lo hacen mínimo.

Ejercicio 9.7.

Halla los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ en $[0, 4]$.

Ejercicio 9.8.

Halla los extremos absolutos de $f(x) = (x + 2)^3(3 - x)$ en $[-1, 2]$.

Ejercicio 9.9.

Con el fin de analizar las demoras en el tránsito en cierta ciudad de Uruguay, la Intendencia contrató una asesoría técnica. Para este estudio, se registró el flujo de tránsito durante varias semanas. Los datos obtenidos permiten modelar que, entre las 13.00 y las 18.00, en un día normal de la semana, la velocidad del tránsito en una vía de salida de la ciudad es aproximadamente $V(t) = t^3 - \dfrac{21}{2}t^2 + 30t + 20$ kilómetros por hora, donde t es el número de horas transcurridas después del mediodía. ¿En qué momento, entre las 13.00 y las 18.00, el tránsito es más rápido y en qué momento es más lento?

Ejercicio 9.10.

Una empresa estima que cuando se emplean x cientos de personas, la utilidad será de $U(x) = 8\,L(x) - x^2$ millones de dólares.
¿Qué nivel de empleo maximiza la utilidad? ¿Cuál es la utilidad a ese nivel?

Ejercicio 9.11.

La función de demanda de determinado artículo es $D(x) = 10^6\,\left(x^2\,e^{-x}\right)$ $(x \geq 2)$, donde x es el precio por unidad (medido en cientos de pesos uruguayos).

(a) Demuestra que el número de ventas decrece al aumentar el precio que se le asigna al artículo en cuestión.

(b) Demuestra que el número de ventas tiende a 0 si el precio tiende a $+\infty$.

(c) ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Calcula dicho ingreso máximo.

Ejercicio 9.12.

Supongamos que cuando se producen x unidades de cierto artículo, el costo total de fabricación es $C(x) = x^2 + 100$. Se denomina costo medio por unidad al cociente entre el costo total y el número de unidades producidas, es decir $\dfrac{C(x)}{x}$.

(a) ¿Cuántos artículos se deben producir para que el costo medio por unidad sea mínimo?

(b) Calcula dicho costo medio mínimo y el costo total para ese nivel de producción.

Ejercicio 9.13.

En caso de que existan, halla los extremos absolutos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ en $[-3, -1)$.

Ejercicio 9.14.

Entre todos los rectángulos de igual perímetro P dado, encuentra el de área máxima.

9.5 Más ejercicios sobre este capítulo

Ejercicio 9.15.

Se consideran las siguientes afirmaciones:
(I) $f(x) = xe^{-2x} + 1$ es estrictamente decreciente en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
(II) $g(x) = 100\,\dfrac{x-2}{x} - 1$ es decreciente en el intervalo $(-3, 0)$.
Entonces

1. ambas son verdaderas.
2. solo la (I) es verdadera.
3. solo la (II) es verdadera.
4. ambas son falsas.

Ejercicio 9.16.

Se consideran las funciones $f(x) = x^2 + ax + 3$ y $g(x) = e^{3x} + b$ y las siguientes afirmaciones:
(I) f es una función creciente en $\mathbb{R}$ para todo valor de a.
(II) g es una función creciente en $\mathbb{R}$ para todo valor de b.
(III) Los valores de a y b que hacen que f y g tengan la misma recta tangente en el punto de abscisa 0 cumplen que $a - b = -1$.
Entonces

1. solo (II) es verdadera.
2. solo (III) es verdadera.
3. solo (I) es verdadera.
4. solo (I) y (II) son verdaderas.
5. solo (I) y (III) son verdaderas.
6. solo (II) y (III) son verdaderas.
7. las tres afirmaciones son verdaderas.
8. las tres afirmaciones son falsas.

Ejercicio 9.17.

Halla los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 2$ en $[0, 3]$ y en $[-2, 3]$.

Ejercicio 9.18.

El costo total de producir x artículos es $C(x) = 3x^3 + 5x + 48$. ¿Cuántos artículos se deben producir para que el costo medio por unidad sea mínimo? ¿Cuánto vale dicho costo medio mínimo? ¿Cuál es el costo total para ese nivel de producción?

Ejercicio 9.19.

Supongamos que cuando se producen q unidades de cierto artículo, el costo total de fabricación es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$. ¿En qué nivel de producción es mínimo el costo medio por unidad?

Ejercicio 9.20.

Un organismo de asistencia pública desea calcular la cantidad de licenciados en trabajo social que debe contratar para procesar las solicitudes de ayuda. Se sabe que el costo promedio de procesar una solicitud es una función que depende del número de licenciados de la siguiente manera: $C(x) = 0,001\ x^2 - 5\ L(x) + 60$ ¿Cuál es el número de licenciados que se deben contratar para minimizar el costo promedio por solicitud? ¿Cuál será dicho costo promedio mínimo?

Ejercicio 9.21.

Sea $D(p) = 10^9 pe^{-p}$ la función de demanda de un cierto artículo para un precio $p \geq 1$. Calcula el valor de p para que el ingreso sea máximo.

Ejercicio 9.22.

Se considera la función $f(x) = 2L(x) - x$. Encuentra, en caso de que existan, el máximo absoluto y el mínimo absoluto de f en el intervalo $(1, 3)$.

Ejercicio 9.23.

Una empresa estima que el ingreso que obtendrá por la venta de determinado artículo será de $I(x) = 10^6 \left(2x - 9\right) e^{-2x}$ pesos, donde x es el precio que se le fije al artículo (medido en pesos) y $x > \dfrac{9}{2}$. ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Calcula dicho ingreso máximo.

Ejercicio 9.24.

La función de demanda de determinado artículo es $D(x) = 10^4 \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)$ $(0 \leq x \leq 1)$, donde x es el precio por unidad (medido en cientos de pesos uruguayos).

(a) Demuestra que $D(x)$ es decreciente y no negativa en $[0, 1]$.

(b) ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla el valor de dicho ingreso. (Te sugerimos observar que $1/2$ es raíz de la derivada de la función de ingreso).

Ejercicio 9.25.

La función de demanda de determinado artículo es $D(x) = 10^3 \left(9x^3 - 34x^2 - 3x + 72\right)$ para $0 \leq x \leq 2$, donde x es el precio por unidad medido en cientos de pesos uruguayos.

(a) Demuestra que $D(x)$ es decreciente y no negativa en $[0, 2]$.

(b) ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla el valor de dicho ingreso. (Te sugerimos observar que 1 es raíz de la derivada de la función de ingreso).

Ejercicio 9.26.

En caso de que existan, halla los extremos absolutos de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 3}$ en $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

Ejercicio 9.27.

Una empresa estima que la utilidad que obtendrá por la venta de determinado artículo será de $U(x) = 10^6 \left(\dfrac{6}{x} + L\left|\dfrac{x-2}{x}\right|\right)$ pesos, donde x es el precio que se le fije al artículo (medido en pesos) y $x > 2$. Encuentra el precio que se le debe asignar al artículo para que la utilidad sea máxima. Calcula dicha utilidad máxima.

Ejercicio 9.28.

Una proyección a cinco años de la tendencia de una población señala que dentro de t años la población de cierta comunidad será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$ miles.

(a) ¿En qué momento, durante el período de cinco años, crece la población con mayor rapidez?

(b) ¿Y con menor rapidez?

Tengan en cuenta que en ambas partes se pide optimizar la velocidad de crecimiento, es decir, $P'(t)$.

Ejercicio 9.29.

Una fábrica de bebidas desea construir latas de forma cilíndrica (cilindro circular recto) que contengan un volumen V del producto. Comprueba que se minimizan los costos debidos al material usado cuando la altura de la lata es el doble del radio de su base.

Referencias bibliográficas

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales* [Cuarta Ed.]. McGraw Hill.

Carbonell, E.; Seoane, M. & Saa, J. (2008). *Cálculo con soporte interactivo en Moodle.* Pearson.

Courant, R. & John, F. (1979). *Introducción al cálculo y al análisis matemático* [Vol. I, Segunda Ed.]. Limusa.

de Burgos, J. (1995). *Cálculo infinitesimal de una variable*. Mc Graw Hill.

Hoffman, L. D. & Bradley, G. L. (1998). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales* [Sexta Ed.]. McGraw Hill.

Larson, R.; Hostetler, R. & Edwards, B. (1995). *Cálculo* [Vol. 1, Quinta Ed.]. McGraw Hill.

Moretti, J. (2004). *Cálculo en el mundo de las desigualdades.* Fundación de Cultura Universitaria.

Peláez, F. (2014). *Introducción al cálculo*. Grupo Armónico.

Smith, R. & Minton, R. (2000). *Cálculo* [Tomo 1., Primera Ed.]. McGraw Hill.

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal* [Segunda Ed.]. Reverté.

Índice alfabético

Capitalización continua, 97
Cociente incremental, 166
Completitud, 161
Continuidad
    de la función compuesta, 150
    en todo el dominio, 147
    en un punto, 146
Crecimiento
    de una función, 189

Derivada
    en un punto, 167
    función, 172
    interpretación geométrica, 167
    regla de la cadena, 178
Descomposición factorial, 41

Equilibrio
    entre oferta y demanda, 48
Evolución de poblaciones, 100

Funciones
    equivalentes, 134
Función
    codominio de una, 55
    dominio de una, 55
    compuesta, 61
    creciente, 189
    cuadrática, 35, 36
    de costo, 27
    de demanda, 45
    de elasticidad, 197
    de ingreso, 28, 45
    de oferta, 48
    de utilidad, 28
    decreciente, 189
    estrictamente creciente, 189
    estrictamente decreciente, 189
    exponencial, 88
    imagen de una, 55
    lineal, 11
    logarítmica, 93
    marginal, 182
    polinómica de primer grado, 11
    polinómica de segundo grado, 36
    potencial, 67
    preimagen de una, 55
    recorrido de una, 56
    recta tangente a una, 168
    signo, 146
    valor absoluto, 78

Gráfica
    de una función, 58

Ínfimo
    de un conjunto, 160
Intersección de dos rectas, 25
Interés compuesto, 98

Límite
    funciones equivalentes, 134
    finito de una función, 110, 129
    infinito de una función, 113, 132
    lateral, 121

Máximo
    de un conjunto, 160
    relativo, 191
Mínimo
    de un conjunto, 160
    relativo, 191

Notas musicales, 103

Optimización
    de funciones, 200

Órdenes
de infinitos, 139

Pendiente
de una función lineal, 15

Supremo
de un conjunto, 160

Tabla
de derivadas, 179
de límites, 116
Tasa promedio de cambio, 164
Teorema
de Bolzano, 151
de Darboux, 158
de derivada nula, 187
de igual derivada, 188
de la derivada de la función compuesta, 178
de Lagrange, 186
de Weierstrass, 155

Apéndice

Respuestas de los ejercicios

Capítulo 1

Ejercicio 1.1.

x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
1	2	1	-3	-1	2	2
3	5	2	1	5	4	2
6	2	-4	7	-1	-8	2
4	-2	-6	3	-9	-12	2

Ejercicio 1.2.

x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
1	3	2	1	-5	-6	-3
4	5	1	-8	-11	-3	-3
5	4	-1	-11	-8	3	-3
0	-2	-2	4	10	6	-3

Ejercicio 1.3.

Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 1.4.

Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 1.5.

Por ejemplo $f_1(x) = -x + 4$.
Por ejemplo $f_2(x) = x - \frac{2}{3}$.
Por ejemplo $f_3(x) = x + 2$.
Por ejemplo $f_4(x) = -2x - 5$.

Ejercicio 1.6.

a) f_1 se anula en -2, es positiva en $(-2, +\infty)$ y es negativa en $(-\infty, -2)$.
b) f_2 se anula en $\frac{1}{3}$, es positiva en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y es negativa en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.
c) f_3 se anula en $\frac{3}{2}$ y en 5, es positiva en $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ y es negativa en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (5, +\infty)$.
d) f_4 se anula en 3, en 1 y en 0, es positiva en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$ y es negativa en $(0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Ejercicio 1.7.

a) $y = 2x + 5$.

b) $y = -3x + 4$.

c) $y = 2x$.

d) $y = -x + 1$.

Ejercicio 1.8.

a) Se pueden confeccionar 24 cuadros de valores. Si elegimos que la primera columna esté ordenada de menor a mayor, entonces tendremos 12 (de las cuales 2 están como ejemplo en la consigna del ejercicio).

b) Verifica en GeoGebra.

c) Los restantes 10 cuadros de valores con sus respectivas funciones lineales son:

x	$f(x)$
1	3
2	4

recta de ecuación $y = x + 2$

x	$f(x)$
1	4
3	2

recta de ecuación $y = -x + 5$

x	$f(x)$
1	2
4	3

$rectadeecuaciny$=1$\frac{}{3x+\frac{5}{3}}$

x	$f(x)$
1	3
4	2

recta de ecuación $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

x	$f(x)$
2	1
3	4

recta de ecución $y = 3x - 5$

x	$f(x)$	
2	4	recta de ecuación $y = -3x+10$
3	1	

x	$f(x)$	
2	1	recta de ecuación $y = x - 1$
4	3	

x	$f(x)$	
2	3	recta de ecuación $y = -x + 5$
4	1	

x	$f(x)$	
3	1	recta de ecuación $y = x - 2$
4	2	

x	$f(x)$	
3	2	recta de ecuación $y = -x + 5$
4	1	

Ejercicio 1.9.

a) $r_1 \cap r_2 = \{(1, 5)\}$

b) $r_1 \cap r_2 = \{(-\frac{4}{5}, \frac{23}{5})\}$

c) $r_1 \cap r_2 = \{(1, 4)\}$

d) $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ (r_1 y r_2 son rectas paralelas no coincidentes).

e) $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ (r_1 y r_2 son la misma recta, coinciden, es decir son rectas coincidentes).

f) $r_1 \cap r_2 = \{(3, -3)\}$ (la recta vertical r_1 y la recta inclinada r_2 se cortan en un único punto).

Ejercicio 1.10.

La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 1.11.

a) $C_1(x) = 3x$

b) $C_1(r) = 3r$

c) $C_1(2r) = 6r = 2C_1(r)$, o sea que el costo de producción se duplica.

d) $C_2(x) = 3x + 30$

e) $C_2(2r) = 6r + 30 \neq 6r + 60 = 2C_2(r)$, o sea que el costo de producción no se duplica.

Ejercicio 1.12.

a) $U(x) = 17x - 34\,000$

b) Al menos 2000

Ejercicio 1.13.

a) $U(x) = 10x - 5000$

b) Al menos 500

c) 45 000 y 5000

Ejercicio 1.14.

a) $C(x) = 2x + 20\,000$, $I(x) = 7x$, $U(x) = 5x - 20\,000$

b) 7000 artículos

c) 60 000 artículos

Ejercicio 1.15.

a) $C_A(x) = 3x$, $C_B(x) = 2x + 200$

b) Verifica en GeoGebra.

c) *i*) Opción A

c) *ii*) Opción B

d) 200 km

Ejercicio 1.16.

$C_A(x) = 2x + 500$, $C_B(x) = x + 1200$

Es más conveniente la Opción A si se producen menos de 700 unidades.

Ejercicio 1.17.

a) $C_A(x) = 190x + 930$, $C_B(x) = 380x$

b) $C_A(3) = 1500$, $C_B(3) = 1140$

c) Es más conveniente la A solo cuando hay más de 4 invitados.

d) 8 invitados

Ejercicio 1.18.

a) $C(x) = 3x + 6000$, $I(x) = 9x$, $U(x) = 6x - 6000$, $x_e = 1000$

b) $C_2(x) = 3,5x + 4000$, $I_2(x) = 9x$, $U(x) = 5,5x - 4000$

c) Conviene mano de obra solo si $x < 4000$

Ejercicio 1.19.
a) $C(x) = 3x + 10$
b) $C_2(x) = 0,50x + 60$
c) 20
d) Panadero del barrio
e) 2 y 8 respectivamente

Ejercicio 1.20.
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 1.21.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 1.22.
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 1.23.
La respuesta correcta es la 4.

Ejercicio 1.24.
La respuesta correcta es la 3.

Capítulo 2

Ejercicio 2.1.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 2.2.
$V = (3, -8)$

Ejercicio 2.3.
El mínimo absoluto de la función vale $-\frac{14}{15}$ y la función no tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.4.
Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 2.6.
a) $(1, 1)$ y $(2, 4)$
b) $(-1, 1)$ y $(2, 7)$

Ejercicio 2.7.
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 2.8.
a) $I(p) = (3000 - 3p)p$
b) $p = 500$, $I(500) = 750\,000$
c) $p = 502$, $U(502) = 644\,012$

Ejercicio 2.9.
$p = 11$, $U(11) = 230$ dólares.

Ejercicio 2.10.
a) $S(p) = p^2 - 100$, $D = [10, +\infty)$
b) $S(20) = 300$
c) $p = 30$
d) El precio de equilibrio es 25.
e) $p > 25$

Ejercicio 2.11.
$S(p) = 40p + 80$, $p_e = 3$

Ejercicio 2.12.
$S(p) = 40p - 800$, $S(40) = 800$

Ejercicio 2.13.
2350

Ejercicio 2.14.
$D(p) = -100p + 2400$; $S(p) = 100(p^2 + p)$; $S(5) = 3000$

Ejercicio 2.15.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 2.16.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 2.17.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 2.18.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 2.19.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 2.20.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 2.21.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 2.22.
La respuesta correcta es la 4.

Capítulo 3

Ejercicio 3.1.
a) $\mathbb{R}$
b) $\{4\}$
c) $(-\infty, 4]$
d) $[-1, +\infty)$

Ejercicio 3.2.
a) $(f+g)(x) = x^3 - 4$
a) $Dom(f+g) = \mathbb{R}$
a) $(f.g)(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 6x - 5$
a) $Dom(f.g) = \mathbb{R}$
a) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x - 5}$
a) $Dom(\dfrac{f}{g}) = \mathbb{R} - \{5\}$
b) $(f+g)(x) = \dfrac{1}{x-1} + x - 1$
b) $Dom(f+g) = \mathbb{R} - \{1\}$
b) $(f.g)(x) = 1$
b) $Dom(f.g) = \mathbb{R} - \{1\}$
b) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
b) $Dom(\dfrac{f}{g}) = \mathbb{R} - \{1\}$

Ejercicio 3.3.
a) $(g \circ f)(0) = 7$
b) $(g \circ f)(5) = -10$
c) $(g \circ f)(1) = 5$
d) $(g \circ f)(-2) = 0$

Ejercicio 3.4.
a) $(g \circ f)(x) = (x+3)^2$
a) $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$
b) $(g \circ f)(x) = x^3(x+1)^3$
b) $(f \circ g)(x) = x^3(x^3+1)$
c) $(g \circ f)(x) = x$
c) $(f \circ g)(x) = x$
d) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
d) $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$
e) $(g \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$
e) $(f \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$

Ejercicio 3.5.
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 3.6.
Respuesta correcta: arriba a la derecha.

Ejercicio 3.7.
a) Verifica en GeoGebra.
b) $f(-2) = -1$, $f(0) = 3$, $f(5) = -15$
c) $(f \circ f)(5) = f(-15) = -27$
d) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -1$ o $x = 1$

Ejercicio 3.8.
a) Verifica en GeoGebra.
b) $f(-1) = 5$, $f(1) = 3$, $f(2) = 4$

Ejercicio 3.9.
a) Verifica en GeoGebra.
b) Raíces de la ecuación $x = -1$ y $x = \dfrac{3}{2}$

Ejercicio 3.10.
a) $a = 3$, $b = 4$
b) Raíces $x = 0$ y $x = 1$

Ejercicio 3.11.
a) $a = 2$, $b = 1$
b) Verifica en GeoGebra.
c) Raíces $x = -1$ y $x = 1$
d) $(f \circ f)(2) = 3$

Ejercicio 3.12.

a) 200, 180 y 170 respectivamente

b) $f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si} \quad x < 6 \\ 180x & \text{si} \quad 6 \leq x \leq 15 \\ 170x & \text{si} \quad x > 15 \end{cases}$

Ejercicio 3.13.

a) $a = 4, b = -2$

b) Única raíz $x = 4$

c) Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 3.14.

La respuesta correcta es la **4**.

Ejercicio 3.15.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -3x + 6 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3 \\ -x + 6 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

b) Verifica en GeoGebra.

c) $[-3, +\infty)$

d) $x = -2, x = 14$

e) Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 3.16.

Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 3.17.

La respuesta correcta es la **1**.

Ejercicio 3.18.

La respuesta correcta es la **2**.

Ejercicio 3.19.

La respuesta correcta es la **5**.

Ejercicio 3.20.

La respuesta correcta es la **2**.

Ejercicio 3.21.

La respuesta correcta es la **3**.

Capítulo 4

Ejercicio 4.1.

Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 4.2.

$2,\ 5,\ 2,\ 4,\ 3,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$

Ejercicio 4.3.

La respuesta correcta es la **4**.

Ejercicio 4.4.

Verifica las igualdades.

Ejercicio 4.5.

a) $x = 5$

b) $x = 1$

c) $x = 0$

d) $x = 3$

e) $x = 4$

f) $x = 1, x = 7$

Ejercicio 4.6.

a) $\dfrac{L(9)}{3} \approx 0,7324$

b) $\dfrac{L(4)}{2} = L(2) \approx 0,6931$

c) 3

d) No existe.

Ejercicio 4.7.

a) $8532,96$

b) $8549,82$

Ejercicio 4.8.

a) $128\,402,54$

b) 17 años

Ejercicio 4.9.

11 años

Ejercicio 4.10.
a) Opción A: 23 163, 67 dólares.
Opción B: 31 054, 14 dólares
b) Debería ser una tasa del 7 %.

Ejercicio 4.11.
a) $A = 10^6$, $k = 2$
b) $P(6) = 10^6 e^{12}$

Ejercicio 4.12.
Año 1997

Ejercicio 4.13
$P(t) = 100e^{\frac{1}{60}L(4,5)}$
El tiempo requerido para que se duplique es aproximadamente de $27, 65$ minutos .

Ejercicio 4.14.
$A = 61$, $k = \dfrac{1}{2}L\left(\dfrac{53}{61}\right)$
Llegará en aproximadamente 11 minutos

Ejercicio 4.15.
107 habitantes

Ejercicio 4.16.
a) $k = -(L2)/5730$
b) $A = 50, 49, 3988$ gramos

Ejercicio 4.17.
a) $\dfrac{L(2)}{k}$
b) $-\dfrac{L(3)}{k}$

Ejercicio 4.18.
Comprueba las igualdades.

Ejercicio 4.19.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 4.20.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 4.21.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 4.22.
La respuesta correcta es la 1.

Capítulo 5

Ejercicio 5.1.
Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 5.2.
Verifica en GeoGebra.

Ejercicio 5.3.
a) $+\infty$
b) $-\infty$
c) 7
d) $+\infty$
e) $-\infty$
f) 0, más precisamente 0^+
g) $+\infty$.
h) $-\infty$
i) 0, más precisamente 0^+.
j) 0, más precisamente 0^-
k) $+\infty$
l) No es posible conocer el límite con la información disponible.
m) $+\infty$
n) 0, más precisamente 0^+
o) 0, más precisamente 0^-

Ejercicio 5.4.
La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 5.5.

a) 1

b) 1

c) -2

d) 6

e) -7

f) $\frac{5}{3}$

g) $\frac{4}{3}$

h) 2

Ejercicio 5.6.

$a = -1, b = -6$

Ejercicio 5.7.

$a = -15, L = \frac{1}{8}$

Ejercicio 5.8.

$a = -8, b = 16$

Ejercicio 5.9.

$a = 11, b = -22$

Ejercicio 5.10.

a) 0

b) No existe. Por izquierda es $\frac{1}{2}$ y por derecha es 2.

c) 6.

d) No existe. Por izquierda es $-\infty$ y por derecha es $+\infty$.

e) $+\infty$

f) No existe. Por izquierda es $+\infty$ y por derecha es $-\infty$.

Ejercicio 5.11.

$a = 2, b = -7$ y el límite es 1.

Ejercicio 5.12.

a) 0

b) $+\infty$

c) 0

d) $-\infty$

Ejercicio 5.13.

La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 5.14

La respuesta correcta es la 4.

Ejercicio 5.15.

Por derecha es $\frac{L(2)}{4}$ y por izquierda es $-\infty$.

Ejercicio 5.16.

La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 5.17.

La respuesta correcta es la 3.

Capítulo 6

Ejercicio 6.1.

a) $-\frac{5}{3}$

b) $-\frac{5}{3}$

c) 0

d) 0

e) $+\infty$

f) $+\infty$

g) $+\infty$

h) $-\infty$

Ejercicio 6.2.

a) -2

b) -9

c) 5

d) $-\frac{2}{3}$

Ejercicio 6.3.

a) Para $x \to -\infty$ es 0 y para $x \to +\infty$ es 5.

b) Para $x \to -\infty$ es 0 y para $x \to +\infty$ es $+\infty$.

c) Para $x \to -\infty$ es 2 y para $x \to +\infty$ es $+\infty$.

d) Para $x \to -\infty$ es $+\infty$ y para $x \to +\infty$ es $+\infty$.

Ejercicio 6.4.

a) 2

b) 0

c) $+\infty$

d) $+\infty$

e) 0

f) $+\infty$.

Ejercicio 6.5.

a) Para $x \to -\infty$ es $-\infty$ y para $x \to +\infty$ es 0.

b) Para $x \to -\infty$ es $+\infty$ y para $x \to +\infty$ es 0.

c) Es 0 para cualquier $\alpha > 0$.

Ejercicio 6.6.

Para $x \to -\infty$ es $-\infty$ y para $x \to +\infty$ es 0.

Ejercicio 6.7.

$a = 0, b = 3$

Ejercicio 6.8.

a) 0, más precisamente 0^-

b) $+\infty$

c) 0, más precisamente 0^+

d) 0, más precisamente 0^-

Ejercicio 6.9.

La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 6.10

La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 6.11.

La respuesta correcta es la 4.

Capítulo 7

Ejercicio 7.1.

a) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) g es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) h es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) j es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.2.

f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ independientemente de λ y en 2 es continua si y solo si $\lambda = -1$.

Ejercicio 7.3.

$a = 3, b = -1$

Ejercicio 7.4.

a) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) g es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) h es continua en todo $\mathbb{R}$.

d) j es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$ independientemente de a. Además si $a = 3$ cumple que es continua en $x = -2$.

Ejercicio 7.5.

Por ejemplo $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in (0, 1] \end{cases}$

Ejercicio 7.6.

Alcanza con verificar que f está en las hipótesis del teorema de Bolzano.

Ejercicio 7.7.

Alcanza con verificar que f está en las hipótesis del teorema de Bolzano.

Ejercicio 7.8.
a) $M = 9, m = 0$
b) $M = 9, m = -7$
c) $M = 2, m = -1$
d) $m = -1$ y no tiene máximo
e) $M = 4, m = -2$
f) No tiene ni máximo ni mínimo
g) $M = 2$ y $m = -2$

Ejercicio 7.10. Demuestra la propiedad utilizando la sugerencia.

Ejercicio 7.10.
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 7.11
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 7.12.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 7.13.
a) Verdadero
b) Falso
c) Falso

Capítulo 8

Ejercicio 8.1.
a) Demuestra la propiedad utilizando la definición de derivada.
b) $y = 12x - 16$

Ejercicio 8.2.
a) $y = x - 1$
b) $y = x + 1$
c) $y = 12x - 16$
d) $y = 5x + 4$

Ejercicio 8.3.
a) $f'(x) = 3x^2 - 2, y = x + 2$
b) $f'(x) = 2x - 5, y = -\dfrac{1}{4}$
c) $f'(x) = 3x^2 - 4x, y = 4x - 4$
d) $f'(x) = 6x^2 - 5e^x, y = -5x - 1$
e) $f'(x) = -3x^2 + \frac{1}{x}, y = -2x + 1$
f) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}, y = -3x - 1$

Ejercicio 8.4.
Los puntos son $(-3, 1)$ y $\left(-1, -\dfrac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 8.5.
El punto es $(2, L(2))$.

Ejercicio 8.6.
a) $a = -1, b = -1$
b) $a = 2, b = 1$
c) $a = 5, b = 1$

Ejercicio 8.7.
$d'(2) = 4$ (o sea 40 km por hora)

Ejercicio 8.8.
a) $f'(1) = -10$
b) 4 segundos
c) $f'(4) = -40$

Ejercicio 8.9.
a) $f'(3) = 70$
b) 20 segundos
c) $f'(20) = -100$

Ejercicio 8.10.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)'(x)$	$(g \circ f)'(x)$
0	1	2	5	-3	0	0	-6	5
1	3	0	-2	1	1	1	5	1
2	0	3	2	4	2	2	-4	-6
3	2	1	-1	$-\frac{1}{2}$	3	3	1	-4

Ejercicio 8.11.
El punto es $(1, L(3))$.

Ejercicio 8.12

a) $f'(x) = x^2 + 4x + 3$

b) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

c) $f'(x) = 2(-x^2 + x - 4)e^{-2x}$

d) $f'(x) = 2(-2x^2 + x + 1)e^{-x^2}$

e) $f'(x) = 64x^3(2x-1)^3(4x-1)$

f) $f'(x) = (2x-2)L\,|x| + (x^2 - 2x + 3)\dfrac{1}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{(2x-5)e^{-2x}}{(-x+3)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{5}{(2x-3)(x+1)}$

i) $f'(x) = (1+x)(2-x)^2(-5x+1)$

j) $f'(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

k) $f'(x) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

l) $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Ejercicio 8.13

a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$,
$f''(x) = 6x - 8$

b) $f'(x) = L\,|x|\,$,
$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f'(x) = \dfrac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$,
$f''(x) = \dfrac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$

d) $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}e^x$,
$f''(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$

e) $f'(x) = \dfrac{12}{(x-1)\,(5-x)}$,
$f''(x) = \dfrac{24(x-3)}{(x-1)^2\,(x-5)^2}$

f) $f'(x) = e^x 3(x-1) + 2x - 2$,
$f''(x) = xe^x + 2$

Ejercicio 8.14

La ecuación de la recta tangente es $y = x + 3$.

Resulta que $f(1,1) \approx 4,1$, mientras que $f(1,1) = 4,09$.

Ejercicio 8.15

$C'(100) = 30\,002$, $C(101) - C(100) = 30\,303$

Ejercicio 8.16

$C'(x) = 0,04x + 2$, $C'(100) = 6$,
$C(101) - C(100) = 6,02$

Ejercicio 8.17

$C(x+1) - C(x) = 2ax + a + b$

Ejercicio 8.18

$U'(50) = 25$, $U(51) - C(50) = 25,302$

Ejercicio 8.19

La respuesta correcta es la **4**.

Ejercicio 8.20.

La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 8.21.

La respuesta correcta es la 3.

Ejercicio 8.22.

La respuesta correcta es la 1.

Capítulo 9

Ejercicio 9.1.

$a = 6$, $b = 0$

Ejercicio 9.2.

a) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f'(x) < 0$ en $(1, +\infty)$

b) f es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$ y es estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$. Por lo tanto, en $x = 1$ la función f presenta máximo relativo.

c) Para $x \to -\infty$ da $-\infty$ y para $x \to +\infty$ da 0.

Ejercicio 9.3.
a) $\eta(p) = \dfrac{p}{120 - p}$
b) $\eta(100) = 5$ (elástica).
El gasto total es 4000. Si el precio se incrementa un 5 % el gasto pasa a ser 3150
c) $\eta(50) = \dfrac{5}{7}$ (inelástica).
El gasto total es 7000. Si el precio se incrementa un 5 % el gasto pasa a ser $7087,5$

Ejercicio 9.4.
a) $\eta(p) = \dfrac{2p^2}{900 - p^2}$
b) $\eta(10) = \dfrac{1}{4}$ (inelástica).
El gasto total es 8000. Si el precio se incrementa un 5 % el gasto pasa a ser $8292,37$.
c) $\eta(20) = \dfrac{8}{5}$ (elástica).
El gasto total es 10 000. Si el precio se incrementa un 5 % el gasto pasa a ser 9639.

Ejercicio 9.5.
a) Verifica la propiedad calculando $D'(x)$.
b) $\eta(p) = \dfrac{2p^2}{1000 - p^2}$
c) $\eta(20) = \dfrac{1}{12}$ (inelástica).
El gasto total es 192 000. Si el precio se incrementa un 5 % el gasto pasa a ser 200 739.
d) $\eta(80) = \dfrac{32}{9}$ y el gasto total es 288 000.

Ejercicio 9.6.
$\eta(2) = \dfrac{8}{5}$

Ejercicio 9.7.
$M = 4$, $m = 0$

Ejercicio 9.8
$M = \dfrac{16875}{256}$, $m = 4$

Ejercicio 9.9.
El tráfico es más rápido a las 2.00 y más lento a las 5.00.

Ejercicio 9.10.
200 personas. La utilidad a ese nivel es $1545,77$ dólares.

Ejercicio 9.11.
a) Verifica la propiedad calculando $D'(x)$.
b) Verifica la propiedad calculando el límite de $D(x)$ cuando $x \to +\infty$.
c) 300 pesos. El ingreso máximo vale $134\,425\,084,5$ pesos.

Ejercicio 9.12.
a) 10 artículos
b) Costo medio mínimo 20. Costo total 200

Ejercicio 9.13.
$m = -4$ y M no tiene.

Ejercicio 9.14.
Es el cuadrado.

Ejercicio 9.15.
La respuesta correcta es la 2.

Ejercicio 9.16.
La respuesta correcta es la 1.

Ejercicio 9.17.
$M = 2$, $m = -10$
$M = \dfrac{230}{27}$, $m = -10$

Ejercicio 9.18.
2 artículos; costo medio mínimo: 41.

Ejercicio 9.19.
5 unidades

Ejercicio 9.20.
Se deben contratar 50 licenciados.

Ejercicio 9.21.
$p = 2$

Ejercicio 9.22.
$M = 2L(2) - 2$, m no existe.

Ejercicio 9.23.
5 pesos. El ingreso a ese nivel es de $10^6 e^{-10}$ pesos.

Ejercicio 9.24.
a) Demuestra la propiedad calculando $D'(x)$.
b) 50 pesos. El ingreso a ese nivel es de 562 500 pesos.

Ejercicio 9.25.
b) 100 pesos. El ingreso a ese nivel es 4400 000 pesos.

Ejercicio 9.26.
$m = f(0) = \frac{4}{3}$, $M = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{20}{3}$

Ejercicio 9.27.
3 pesos. La utilidad a ese nivel es de $10^6\left(2 + L\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pesos.

Ejercicio 9.28.
a) En $t = 3$ años.
b) $t = 0$

Ejercicio 9.29.
Demuestra la propiedad al minimizar los costos.

Esta publicación cuenta con el apoyo de la Comisión Sectorial de Enseñanza y Educación Permanente de la Universidad de la República. Forma parte de la serie Manuales Didácticos, que tiene como objetivo mejorar las condiciones de aprendizaje de los estudiantes y, al mismo tiempo, propiciar la autoformación del docente mediante la reflexión sobre sus prácticas y sobre el estado del arte en su disciplina. Secundariamente, esta publicación pretende colaborar en la constitución de tradiciones disciplinares y culturas educativas nacionales.

ISBN: 978-9974-0-2414-4

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Prorrectorado de **Enseñanza**